Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Katolikus Pedagógiai Intézet

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2021. március 19.

Differenciálszámítás emelt szintű csoportban a 11. évfolyamon

Horváth Eszter

Kempelen Farkas Gimnázium
Budapest

Témaválasztás

- Miért emelt szintű egy csoport?
  - Pályaválasztás
  - Matematika emelt szintű érettségi
  - A matematikát talán jobban szeretik
- Mi a helye az analízisnek az emelt szintű tananyagban?

Témaválasztás

- Nem emelt szintű egy csoport, ha a szokásos témakörökben
  - Csak többet „magyarázok”,
  - Csak többet gyakorlok.
- Jó lenne a gondolkodás szintjén tovább lépni!

Témaválasztás

- Az analízis fogalmai szokatlanok, idegenek az első találkozásnál.
  - A végtelen nagy és végtelen kicsi gondolata
  - Közelítek valamit és az eredményt „pontosnak” tekintem.
- A középiskolában „van idő” ebben a fogalomkörben lassan haladni – az egyetemhez képest ☺.

Témaválasztás

- Az emelt szintű érettségi kevés anyagot érint, de sok pontot hozhat.
- Feladatokban:
  - Függvények monotonitása
  - Szélsőértékek – legfeljebb harmadfokú függvények esetében.
  - Konvexitás
  - Összetett függvény képzése

Témaválasztás

- Szóbelin 2021-ben a 11.tétel:

  A differenciálhányados fogalma, deriválási szabályok. A differenciálszámítás alkalmazásai (érintő, függvényvizsgálat, szélsőértékfeladatok).

Már foglalkoztunk a differenciálszámítással!

- 2013. Tassy Gergely; 2017 – 2018 Magyar Zsolt
- Ma én a differenciálszámítás megismert technikájának alkalmazására válogattam feladatokat érettségi (régi és új) -, OKTV- és KöMal feladatok közül.
- **A MOTTÓ – nem kell tőle félni.**
- **Van egy kis ötletünk!**

Feladatgyűjtemény

- **13+1 feladat**
  - Érintő
  - Függvényvizsgálat
  - Szélsőértékfeladatok
  - Fizikai alkalmazások
  - Nem csak rutin

Szemléltetés!

- **GeoGebra**
  - Érintő
  - Monotonitás
  - Konvexitás

Függvénygörbe érintője

1. Igazoljuk, hogy az $f(x) = cos^2x + \sin 2x$ és a $g(x) = -5x^2 + 2x + 1$ egyenletű görbék az $x = 0$ abszcisszájú pontjaikban érintik egymást.

Ebben a pontban azonos az érintőjük!

Függvénygörbe érintője

$f(x) = cos^2 x + \sin 2x$ és $g(x) = -5x^2 + 2x + 1$

$$f'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) + 2\cos 2x =$$

$$= -\sin 2x + 2\cos 2x$$

$$f'(0) = 2$$

$$g'(x) = -10x + 2$$

$$g'(0) = 2$$

A két görbe érintőjének meredeksége azonos.

Függvénygörbe érintője

Az érintő meredeksége 2.

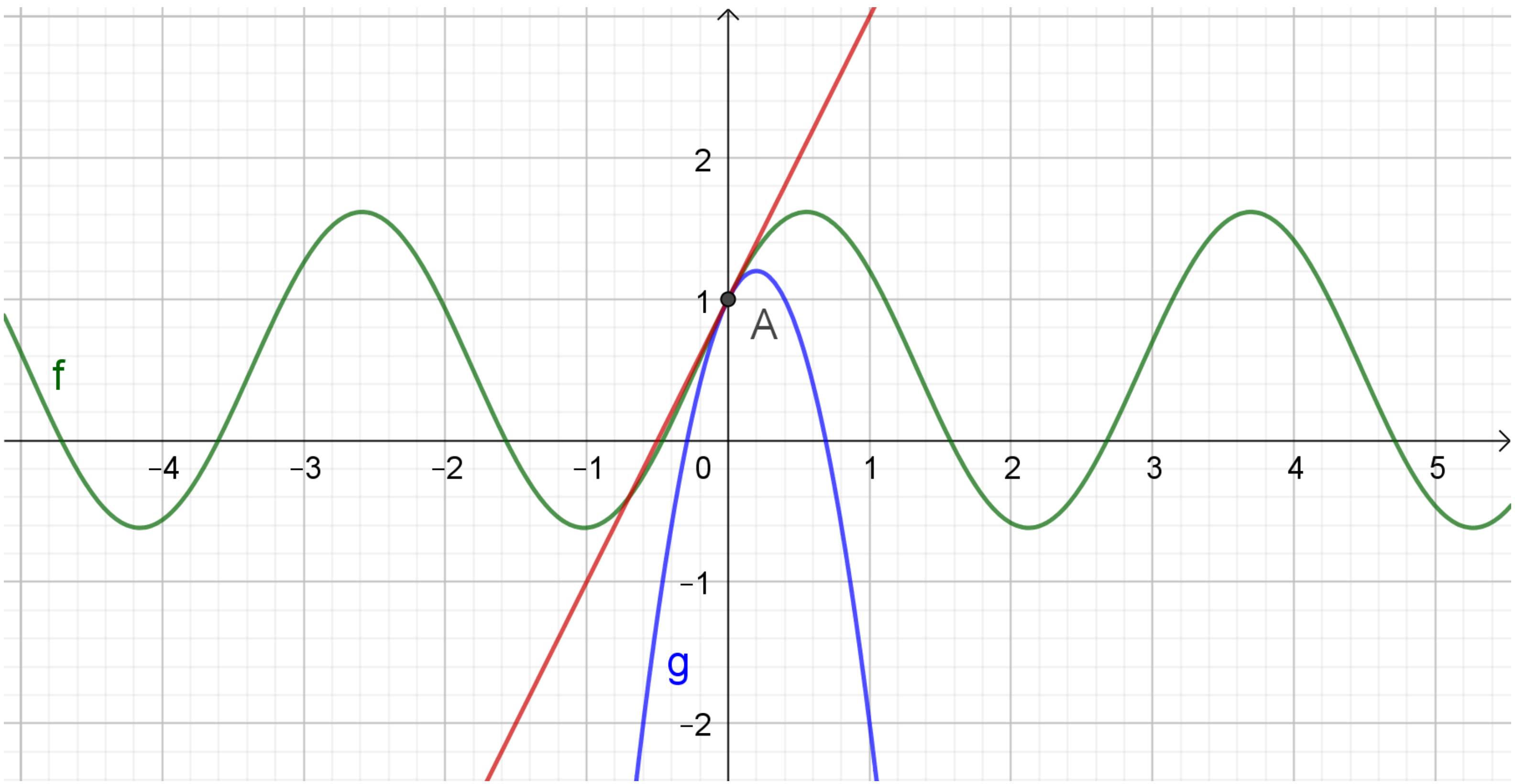
$f(0) = g(0) = 1$, ezért a $(0;1)$ pont mindkét függvény grafikonjának pontja.

A közös érintő egyenlete:

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 1$$

Függvénygörbe érintője



Függvényvizsgálat

2. Vizsgálja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x + x$ függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából.

.

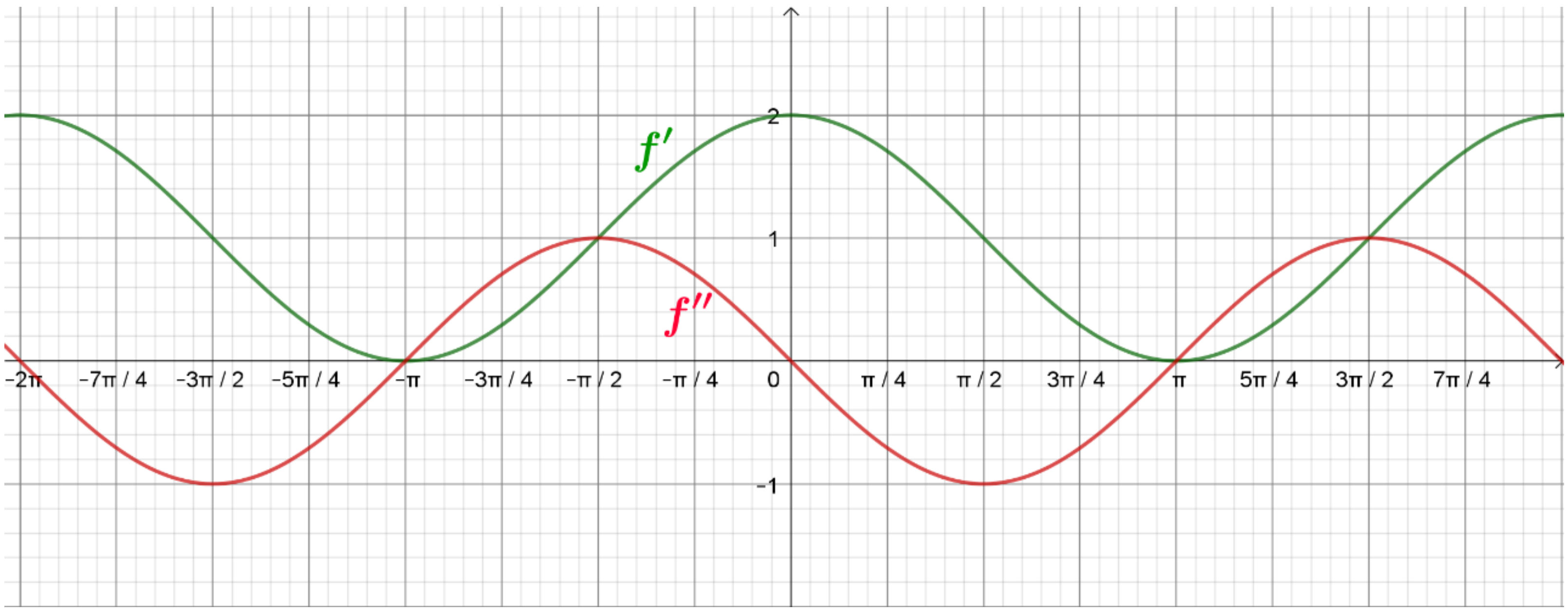
$$f'(x) = \cos x + 1$$

$$f''(x) = -\sin x$$

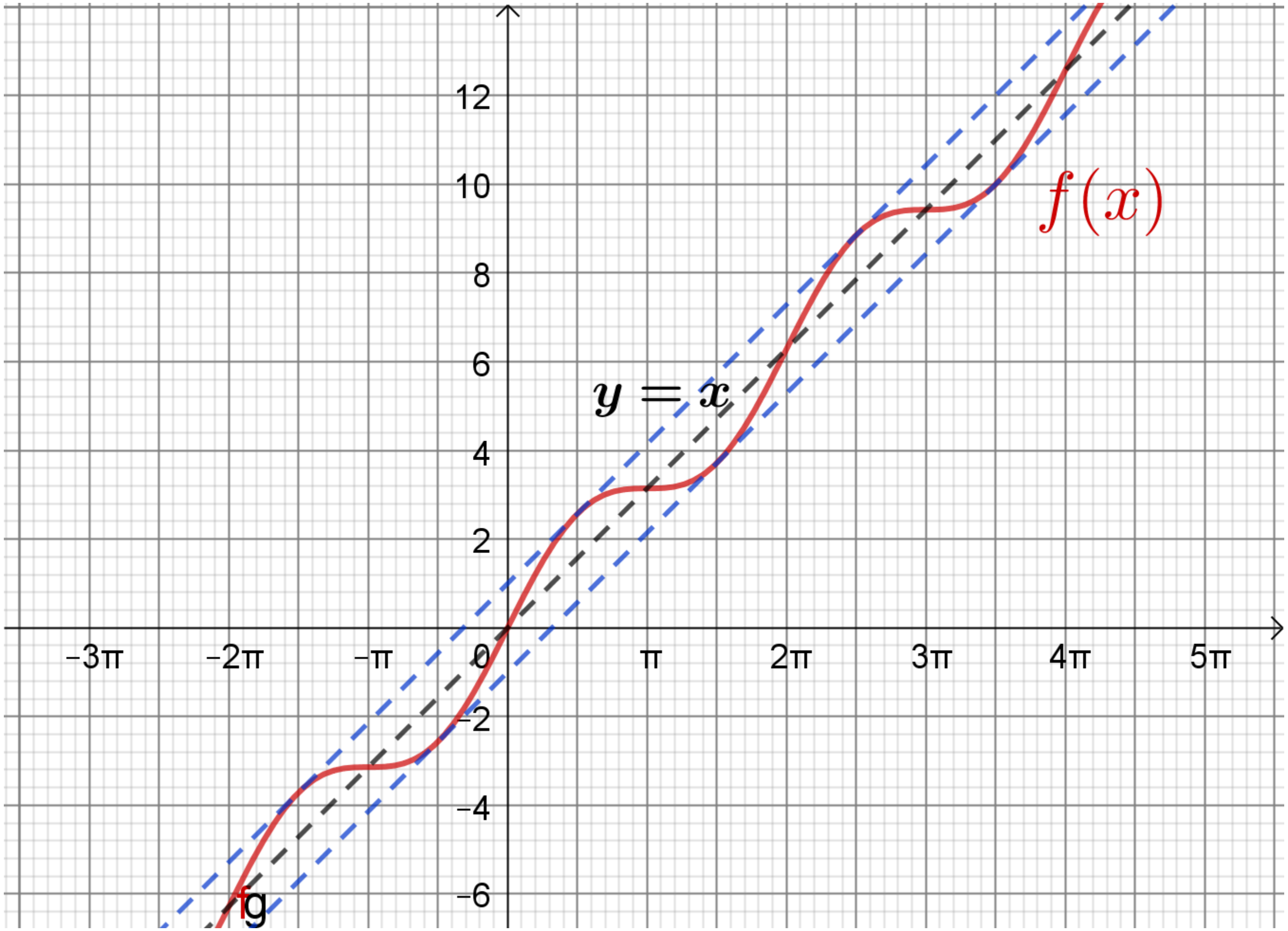
Függvényvizsgálat

$$f'(x) = \cos x + 1$$

$$f''(x) = -\sin x$$



Függvényvizsgálat



Függvényvizsgálat

$$f'(x) = \cos x + 1$$

A függvény menetének vizsgálata

$$f'(x) = \cos x + 1 \geq 0$$

Egy-egy pont kivételével az első derivált pozitív.

A függvény szigorúan monoton nő, bár „néha” a derivált nulla, de ezekben a pontokban nem vált előjelet, tehát ezekben a pontokban nincs szélsőértéke.

Függvényvizsgálat

$-1 \le \sin x \le 1$ alapján becslést adunk

$$x - 1 \le \sin x + x \le x + 1.$$

$$\lim_{-\infty}(x-1) = -\infty;\ \lim_{-\infty}(x+1) = -\infty,$$

ezért $\lim\limits_{-\infty}(\sin x + x) = -\infty;$

$$\lim_{+\infty}(x-1) = +\infty;\ \lim_{+\infty}(x+1) = +\infty,$$

ezért $\lim\limits_{+\infty}(\sin x + x) = +\infty;$

Függvényvizsgálat

$$f''(x) = -\sin x$$

A konvexitás vizsgálata a második derivált segítségével:

Ha $-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$,

akkor $f''(x) = -\sin x > 0$, a függvény konvex.

Ha $2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$,

akkor $f''(x) = -\sin x < 0$, a függvény konkáv.

Szélsőértékfeladatok

3. A $0 \leq x \leq 5$ valós számokra értelmezzük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6}$$

Határozza meg az f legnagyobb és legkisebb értékét!

Érettségi-felvételi feladatok 2000.május 22.

Szélsőértékfeladatok

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6};\ 0 \leq x \leq 5$$

$x^2 - 5x - 6 \neq 0$, $x \neq -1$; $x \neq 6$.

Ezek az értékek nem tartoznak az értelmezési tartományba.

Érdemes a számlálót és a nevezőt is szorzattá alakítani és egyszerűsíteni:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6} = \frac{(x+1)(2x-11)}{(x+1)(x-6)} = \frac{2x-11}{x-6}$$

Szélsőértékfeladatok

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6};\ 0 \le x \le 5$$

$$f(x) = \frac{2x - 11}{x - 6}$$

Egy zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a derivált nulla, vagy az intervallum két végpontjában:

$$f'(x) = \frac{2(x-6) - 1 \cdot (2x - 11)}{(x-6)^2} = \frac{-1}{(x-6)^2}$$

Szélsőértékfeladatok

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6};\ 0 \leq x \leq 5$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-6)^2}$$

A derivált mindig negatív, ezért a függvény szigorúan monoton csökken a $[0; 5]$ intervallumban. Maximumát az $x = 0$-ban, minimumát az $x = 5$-ben veszi fel.

A maximum: $f(0) = \frac{11}{6}$; a minimum $f(5) = 1$.

Szélsőértékfeladatok

4. Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyiszor 400 Ft-tal csökken a $16\,000$ forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

Szélsőértékfeladatok

a) Adja meg annak a B függvénynek az $x \to B(x)$ hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételét jelöli x utassal indított járat esetén! Mi a B függvény értelmezési tartománya?

b) Hány utas esetén lesz a repülőtársaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

Emelt szintű érettségi (magyar, mint idegen nyelv) 2010.május

Szélsőértékfeladatok

Legalább 10 utas esetén indulnak, legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő felett annyiszor 400 Ft-tal csökken a $16\,000$ forint… viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

a) Ha $10 \leq x \leq 20$, akkor egy jegy $16\,000$ Ft,

$$B(x) = 16\,000x.$$

Szélsőértékfeladatok

Legalább 10 utas esetén indulnak, legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő felett annyiszor 400 Ft-tal csökken a $16\,000$ forint… viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

Ha $20 < x \leq 36$, akkor egy jegy $16\,000 - 400(x - 20)$,

$B(x) = (16\,000 - 400(x - 20)) \cdot x = -400x^2 + 24\,000x$.

Szélsőértékfeladatok

Tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$\{x \in \mathbb{N} | 10 \leq x \leq 36\}$$

A hozzárendelési szabály:

$$B(x) = \begin{cases} 16\,000x, & \text{ha } 10 \leq x \leq 20 \quad x \in \mathbb{N} \\ -400x^2 + 24\,000x, & \text{ha } 20 < x \leq 36 \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Szélsőértékfeladatok

$$B(x) = \begin{cases} 16\,000x, & \text{ha } 10 \le x \le 20 \quad x \in \mathbb{N} \\ -400x^2 + 24\,000x, & \text{ha } 20 < x \le 36 \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ha $10 \le x \le 20$, akkor $x = 20$ esetén maximális a bevétel, $B(20) = 320\,000\ Ft.$

Ha $20 < x \le 36$, akkor a valós számokon értelmezett $D(x) = -400x^2 + 24\,000x$ függvény maximumát keressük meg deriválással. Fontos tudni, hogy az egész számokon értelmezett függvény nem deriválható.

Szélsőértékfeladatok

$$D'(x) = -800x + 24\,000.$$

$D'(x) = 0$. ha $x = 30$. $D''(x) = -800$, tehát a függvénynek itt lokális maximuma van. A 30 egész szám, ezért, ezért $x = 30$ az egész számokon értelmezett B függvénynek is a lokális maximumhelye.

$B(30) = 360\,000 > B(20)$, tehát a bevétel **30 utas esetében lesz a legnagyobb.**

Szélsőértékfeladatok

Még egyszer, mert fontos! SOROZATOT nem lehet deriválni.

- A sorozatot kiterjesztjük a valós számok halmazára. Ez a függvény deriválható.
- Megvizsgáljuk, hogy valós számokon értelmezett függvény szélsőértéke milyen kapcsolatban van az egész számokon értelmezett sorozat szélsőértékével.
- A probléma nem „elvi”, a derivált lehet nulla n=24,6-re is.

Szélsőértékfeladatok

5. Egy szabályos háromoldalú egyenes hasáb térfogata $2dm^3$. Legalább mekkora a hasáb felszíne?

KöMal 2019. február, C. 1531

Az alaplap élét jelöljük x-el, a hasáb magasságát m-mel.

$$T_{alap} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$V = T_{alap} \cdot m = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m.$$

Szélsőértékfeladatok

A térfogat 2, tehát $\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m = 2$.

Innen $m = \frac{8}{x^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{3x^2}$.

A hasáb felszíne

$$A(x) = 2 \cdot T_{alap} + 3xm = 2 \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot x \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{3x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{16}{x} \right)$$

Szélsőértékfeladatok

$$A(x) = 2 \cdot T_{alap} + 3xm = 2 \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot x \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{3x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{16}{x} \right)$$

A felszín akkor lesz minimális, amikor az

$f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ függvény.

A feladat jelentése miatt $x > 0$.

Szélsőértékfeladatok

$f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ függvény.

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a derivált 0:

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = 0$$

$$x = 2$$

Ha $x < 2$, akkor a derivált negatív, ha $x > 2$, akkor pedig pozitív. Ezért az $x = 2$ helyen a függvénynek minimuma van.

$A(x)$ minimális értéke $A(2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2^2 + \frac{16}{2}\right) = 6 \cdot \sqrt{3}$.

Egyenlőtlenség megoldása

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$(2 + \cos x) \cdot x > 3 \sin x$$

OKTV 1973 I. forduló

$-1 \leq \cos x \leq 1$, ezért $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$.

$2 + \cos x$ pozitív, egyenlőtlenséget ezzel a kifejezéssel elosztjuk

$$x > \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

Egyenlőtlenség megoldása

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$(2 + \cos x) \cdot x > 3 \sin x$$

$$x > \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

Elég belátnunk, hogy

$$x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} > 0.$$

Egyenlőtlenség megoldása

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$(2+\cos x)\cdot x > 3\sin x$$

Vizsgáljuk az $f(x) = x - \frac{3\sin x}{2+\cos x}$ függvényt.

$$f(0) = 0$$

Elég belátnunk, hogy a függvény szigorúan monoton nő, ha x pozitív.

Egyenlőtlenség megoldása

$$f'(x) = \left(x - \frac{3\sin x}{2+\cos x}\right)' =$$

$$= 1 - 3\,\frac{\cos x \cdot (2+\cos x) - sinx(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(2+\cos x)^2 - 3 \cdot (2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x)}{(2+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{4 + 4\cos x + \cos^2 x - 6\cos x - 3}{(2+\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x - 2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2} =$$

Egyenlőtlenség megoldása

$$= \frac{(1-\cos x)^2}{(2+\cos x)^2}$$

Ez a kifejezés egy valós szám négyzete, ezért

$$\frac{(1-\cos x)^2}{(2+\cos x)^2} \geq 0.$$

A derivált csak $\cos x = 1$ esetén 0, más esetekben pozitív, tehát a függvény szigorúan monoton nő.

Ezzel beláttuk állításunkat.

Fizikai alkalmazások

6. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s\colon [0;5] \to \mathbb{R}, \qquad 5t^2 + 2t.$$

Az időt másodpercben, az utat méterben mérjük.

a) Számítsuk ki az $[1;2]$ intervallumhoz tartozó átlagsebességet!

b) Számítsuk ki a $t = 1\,(s)$ -hoz tartozó pillanatnyi sebességet!

c) Adjuk meg a sebesség-idő függvényt!

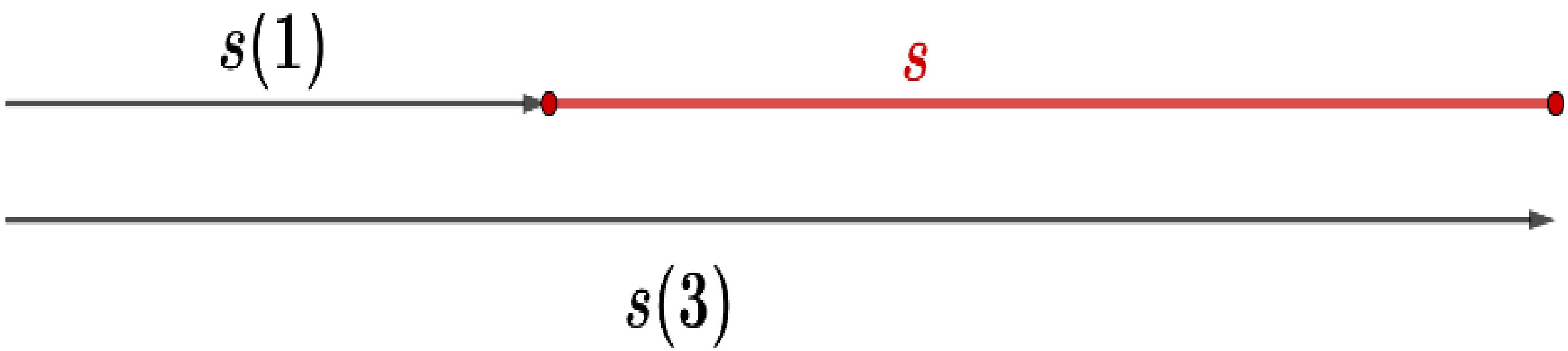
Fizikai alkalmazások

$$s\colon [0;5] \to \mathbb{R}, \qquad 5t^2 + 2t.$$

$$s = s(3) - s(1) = 51 - 7 = 44(m)$$

$$t = 2(s)$$

$$v_{átlag} = \frac{s}{t} = 22\ \frac{m}{s}.$$



Fizikai alkalmazások

Számítsuk ki a $t = 1\ (s)$ -hoz tartozó pillanatnyi sebességet!

Az $[1; t]$ intervallumon az átlagsebesség t függvényeként:

$$\bar{v}(t) = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{5t^2 + 2t - 7}{t - 1} = \frac{(5t + 7)(t - 1)}{t - 1}$$
$$= 5t + 7 \quad ha\ t \neq 1$$

Fizikai alkalmazások

A pillanatnyi sebesség a „nagyon rövid” időre számított átlagsebesség:

$$\lim_{t \to 1} \frac{5t^2 + 2t - 7}{t - 1} = \lim_{t \to 1}(5t + 7) = 12 \left(\frac{m}{s}\right)$$

A sebesség-idő függvény az út-idő függvény első deriváltja:

$$v(t) = s'(t) = 10t + 2$$

$$v(1) = 12$$

Egy szakköri feladat

7. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges pozitív számok, és x tetszőleges 0-tól különböző valós szám, az

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

számot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok x-edik hatványközepének nevezzük

Egy szakköri feladat

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

($x = 1$ esetén a számtani közepet, $x = -1$ esetén a harmonikus közepet, $x = 2$ esetén a kvadratikus közepet kapjuk.)

Bizonyítsuk be, hogy rögzített $a_1, a_2, \dots, a_n$ mellett $f(x)$ az x-nek monoton növő függvénye.

OKTV 1969-es feladathoz megjegyzés

Egy szakköri feladat

Az $f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ függvény monotonitásából következnek a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek.

Egy szakköri feladat

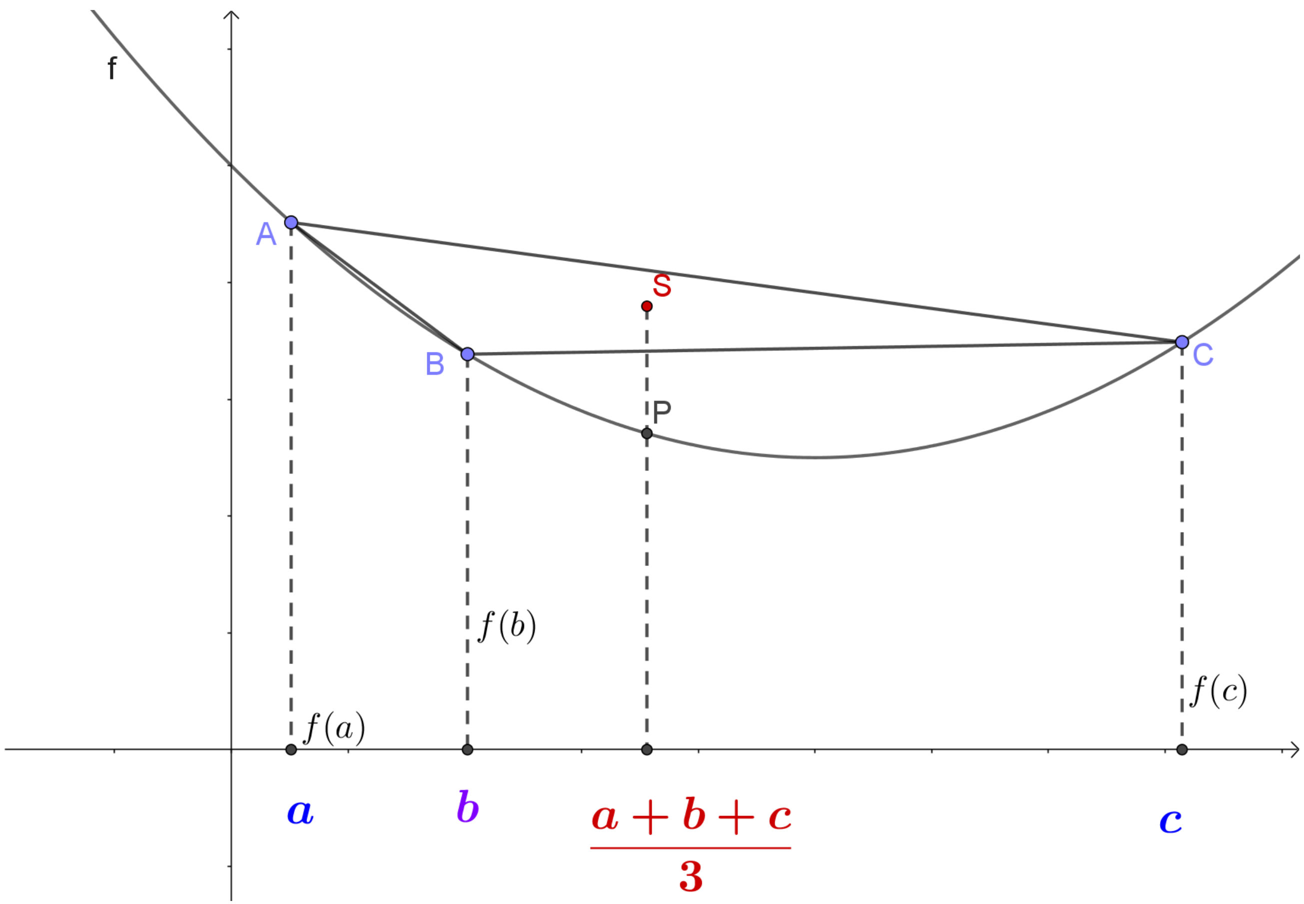
Tudjuk, hogy

$$(e^x)' = e^x;\ (a^x)' = a^x \cdot \ln a\,;\ \ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Ezek felhasználásával meghatározhatjuk a függvény deriváltját és bebizonyíthatjuk, hogy $f'(x) > 0$, tehát a függvény monoton nő.

(A bizonyítás részletei az előadáshoz készült feladatgyűjteményben megtalálhatóak.)

Mire jó a konvexitás vizsgálata?



Mire jó a konvexitás vizsgálata?

Az $ABC\,\Delta$ súlypontja

$$S\left(\frac{a+b+c}{3};\ \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\right)$$

a függvény $P\left(\frac{a+b+c}{3}; f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\right)$ pontja felett van

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

Matematikatanárok levelezőlistája

Ha valaki felvételét kéri a levelezőlistára, erre az e-mail címre írjon nekem:

horv55eszter@gmail.com

Köszönöm a figyelmet!