Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Katolikus Pedagógiai Intézet

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2021. március 19.

Egyenlőtlenségek

dr Kiss Géza,

Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

Néhány probléma, amellyel a téma kapcsán találkozhatunk

- Szigorúan a saját véleményem.
- Olyan minimális a tantervi követelmény, hogy nagyon korlátozottak az alkalmazási lehetőségek.
- Sablonosak, nem eléggé gondolkodásra serkentőek a kitűzhető feladatok.
- Nincs kitekintésük a gyerekeknek a témakörben rejlő lehetőségekre.
- Nincs sikerélmény, csökken a motiváció az önálló problémamegoldásra, a versenyzésre.
- „Így már jobb lenne, ha nem is tanítanánk”.
- Egysíkúak az érettségi szóbeli feleletek.

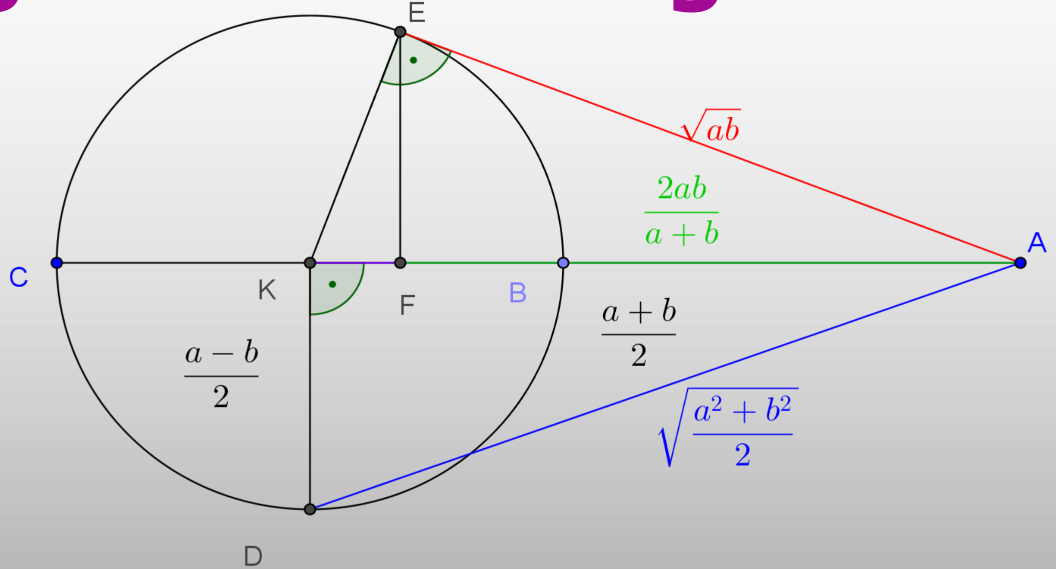
Miért érdemes foglalkoznunk az egyenlőtlenségekkel?

- Remek lehetőségeket nyújtanak különféle témakörök előkészítésére (pl. szélsőérték-feladatok, statisztikai jellemzők.)
- Számtalan fontos és szép alkalmazási területük van.
- Érdekessé tehetők a sokszor unalmasnak tűnő algebrai gyakorlások.
- Sikerélményhez juttatják a gyerekeket.
- Hagyományosan szerepelnek ilyen típusú feladatok a magyarországi versenyeken is.
- A szóbeli emelt szintű érettségin rendszeresen szerepel ez a témakör.

Javaslatok – az előadás vázlata

- Kezdjük egy geometriai modellel!
- Érdemes általánosítani legalább az $n = 3$ esetre.
- Néhány fontos feladattípus.
- Egy elegáns eszköz: a rendezési tétel.
- Tegyünk még egy lépést a nehezebb feladatok felé a Titu-lemmával!

Egy geometriai megközelítés



- Legyen $AC = a$, $AB = b$. A rajzon $a > b$.
- A BC szakasz K felezőpontjára: $AK = \frac{a+b}{2}$.
- Az AKD derékszögű háromszög átfogója: $AD = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
- Az AEK derékszögű háromszög befogója: $AE = \sqrt{ab}$.
- Végül az AE befogó merőleges vetülete az AK átfogóra a befogótételből: $AF = \frac{2ab}{a+b}$.

Érdemes általánosítani az $n = 3$ esetre

- Az ismert Cauchy-féle indukciós módszer helyett most egy tisztán algebrai átalakításon alapuló módszert tekintsünk.
- Vegyük az $(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})^3$ kifejtését:
  $(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc$.
- $a^3+b^3+c^3-3abc=$
  $=(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})^3-3ab(a+b+c)-3bc(a+b+c)-3ca(a+b+c)$
- $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$
  $$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$
- Most x=a^3, y=b^3, z=c^3 helyettesítéssel, mivel a jobb oldal nem lehet negatív épp a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség bizonyítását kapjuk. Egyenlőség a=b=c esetén.

Érdemes általánosítani az $n = 3$ esetre

- Ha a számtani mértani-közép között most bizonyított egyenlőtlenséget az $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ pozitív számokra alkalmazzuk, akkor éppen a harmonikus- és mértani közép közötti egyenlőtlenséget kapjuk.
- $$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc}.$$
- A számtani-négyzetes közép közötti egyenlőtlenséghez - $n = 3$ - felhasználjuk, hogy két számra már bizonyított $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$.
  $$2ca \le c^2 + a^2,$$
- A továbblépéshez $2cb \le c^2 + b^2$. Ezeket adjuk össze, majd adjuk mindkét oldalhoz két négyzet összegét is: $c^2 + (a+b)^2$.
- $$c^2 + 2c(a+b) + (a+b)^2 \le 3c^2 + (a+b)^2 + a^2 + b^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right),$$
  $$(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Néhány fontos feladattípus
Szélsőérték-feladatok

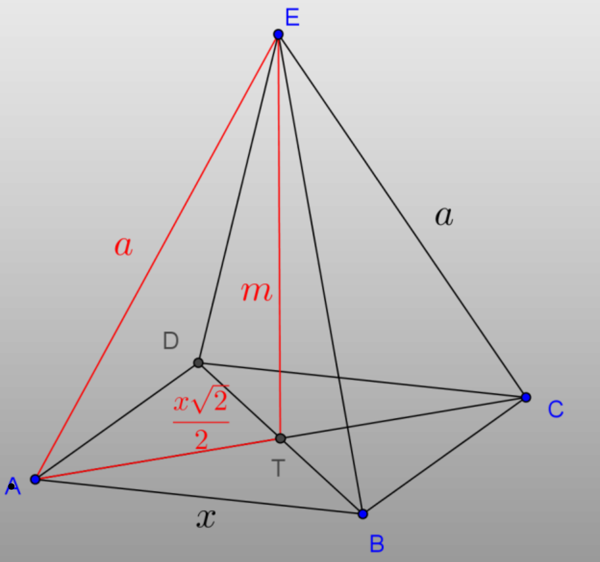
- 1. Egységnyi térfogatú felül nyitott egyenes hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?
- **Megoldás:** $V = r^2\pi m,\ A = r^2\pi + 2r\pi m.$

  A térfogatból kifejezzük a magasságot és beírjuk a felszín képletébe:
- $$A = r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{2V}{r} = r^2\pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}.$$

  A három szám összege nagyobb vagy egyenlő, mint a három szám mértani közepének háromszorosa:
- $$r^2\pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \geq 3\sqrt[3]{r^2\pi \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{V^2\pi}.$$ állandó.
- Egyenlőség (a minimum): $r^2\pi = \frac{V}{r},\ r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},\ m = \frac{V}{r^2\pi} = \sqrt[3]{\frac{V^3\pi^2}{\pi^3 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = r.$

Néhány fontos feladattípus Szélsőérték-feladatok

- 2 . Azok közül a négyoldalú szabályos gúlák közül, amelyeknek mindegyik oldaléle a hosszúságú, melyiknek legnagyobb a térfogata?
- **Megoldás:** A gúla alapéle x, magassága m.
- Pitagorasz-tétel: $m^2 = a^2 - \frac{x^2}{2}.$
- A térfogat négyzetét vizsgáljuk!
- $V^2 = \frac{x^4 m^2}{9} = \frac{x^4}{9}\left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{16}{9} \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \frac{x^2}{4}\left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right).$
- A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:
- $V^2 \le \frac{16}{9}\left(\frac{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + a^2 - \frac{x^2}{2}}{3}\right)^3 = \frac{16}{9} \cdot \frac{a^6}{27} \Rightarrow V \le \frac{4 \cdot a^3}{9\sqrt{3}},\ m_0 = \frac{a}{\sqrt{3}},\ x_0 = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$



Néhány fontos feladattípus
Szélsőérték-feladatok

- 3 . Vizsgáljuk elemi eszközeinkkel az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvény lehetséges szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit.
- **Megoldás** (vázlat): Alkalmazzunk először $y = x - \frac{a}{3}$ helyettesítést:

$$f(y) = \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right).$$

$$f(y) = y^3 - py + q.$$

Elegendő az $f(y) = y^3 - py$ függvényt vizsgálnunk és csak pozitív y számokra, mert páratlan a függvény.

- Ha $p < 0$, akkor a függvény szigorúan növekedő.
- Ha $p > 0$, akkor a függvénynek $y = 0$ és $y = \sqrt{p}$ zérushelyei. E két hely között van minimumhelye. A $]0, \sqrt{p}[$ nyílt intervallumban az
- $-f(y) = y\left(p - y^2\right)$ pozitív, vizsgálhatjuk négyzetének is a maximumát:

$$y^2\left(p - y^2\right)^2 = \frac{1}{2}\left(2y^2\right)\left(p - y^2\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(\frac{2p}{3}\right)^3, \Rightarrow y^2 = \frac{p}{3}, \Rightarrow y = \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Egy elegáns eszköz: a rendezési tétel.

- Tétel: Legyen $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ és $(b_1 b_2,\ldots,b_n)$ két valós szám n-es, továbbá $p_1,\ p_2\ \ \ldots,p_n\ \ a\ b_1 b_2,\ldots,b_n$ egy permutációja.
  Az $a_1\cdot p_1+a_2\cdot p_2+\ \ldots\ +a_n\cdot p_n$ összeg akkor maximális (minimális), ha $a_1,a_2,\ldots,a_n$ és $p_1,\ p_2\ \ \ldots,p_n$ azonosan (ellentétesen) rendezettek.
- **Bizonyítás**(vázlat): Legyen $a_1,a_2,\ldots,a_n$ és $b_1 b_2,\ldots,b_n$ két nem azonosan rendezett szám n-es. Tehát van olyan $i<k,$ hogy $a_i\le a_k$, és $b_i>b_k$. Ha most a teljes szorzatösszegben ezt a két párosítást megváltoztatjuk, akkor elegendő vizsgálni, hogy e két párosítás közül melyik adja a nagyobb összeget.
  - $a_i\cdot b_i+a_k\cdot b_k$ vagy $a_i\cdot b_k+a_k\cdot b_i$?
- $(a_k-a_i)(b_i-b_k)\ge 0$, így
- $a_i\cdot b_k+a_k\cdot b_i\ge a_i\cdot b_i+a_k\cdot b_k$.
- Mindaddig végezhetjük ezt a lépést, amíg találunk nem megfelelő párokat. Véges sok lépésben el tudjuk érni a maximumot és a minimumot is. Ez bizonyítja a tételt.
- Az egyenlőséghez az szükséges, hogy mindegyik cserénél legalább az egyik különbségnél nulla szerepeljen, egyenlőség legyen.

Egy elegáns eszköz: a rendezési tétel. Alkalmazások

- 1. Legyenek $a,\ b$ és c pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy
- $a^6+b^6+c^6 \geq a^5 \cdot b + b^5 \cdot c + c^5 \cdot a$.
- Milyen esetben teljesül az egyenlőség?
- **Megoldás:** Most két számhármasról van szó. Az egyik az a^5, b^5, c^5 a másik pedig az a, b, c.
- Akármilyenek is az a, b, c közötti nagyságbeli viszonyok, biztos, hogy az azonosan rendezés $a^5 \cdot a + b^5 \cdot b + c^5 \cdot c$ nagyobb vagy egyenlő, mint bámely másik rendezés, ez bizonyítja az állítás első részét.
  - $a^5 \cdot a + b^5 \cdot b + c^5 \cdot c \geq a^5 \cdot b + b^5 \cdot c + c^5 \cdot a$.
- Az egyenlőséghez vizsgáljuk a „cseréket!

$$a^5 \cdot a + b^5 \cdot b + c^5 \cdot c \rightarrow a^5 \cdot b + b^5 \cdot a + c^5 \cdot c \rightarrow a^5 \cdot b + b^5 \cdot c + c^5 \cdot a$$

- Mindkét cserénél vagy két ötödik hatványnak, vagy két számnak kell egyenlőnek lennie. Az elsőnél ebből az $a=b$, a másodiknál $a=c$, vagy $b=c$ következik. Egyenlőség tehát akkor és csak akkor, ha
  - $a=b=c$.

Egy elegáns eszköz: a rendezési tétel. Alkalmazások

- 2. Legyenek a, b és c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

- Milyen esetben teljesül az egyenlőség?
- **Megoldás:** Most is két számhármasról van szó.
- FONTOS! Bármely két betű cseréjére az állítás változatlan marad, tehát feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c$.
- Emiatt $a+b \leq c+a \leq b+c$ és $\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{a+b}.$
- A rendezési tétel alapján:

$$a\cdot\frac{1}{b+c}+b\cdot\frac{1}{c+a}+c\cdot\frac{1}{a+b}\geq a\cdot\frac{1}{a+b}+b\cdot\frac{1}{b+c}+c\cdot\frac{1}{c+a},$$

$$a\cdot\frac{1}{b+c}+b\cdot\frac{1}{c+a}+c\cdot\frac{1}{a+b}\geq b\cdot\frac{1}{a+b}+c\cdot\frac{1}{b+c}+a\cdot\frac{1}{c+a}.$$

Egy elegáns eszköz: a rendezési tétel. Alkalmazások

- 2. Legyenek $a,\ b$ és c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

- Milyen esetben teljesül az egyenlőség?
- A két egyenlőtlenséget összeadva:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\geq\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3.$$

- Kettővel osztva a bizonyítandót kapjuk. Egyenlőség akkor és csak a akkor, ha a cseréknél vagy két szám, vagy két összeg egyenlő, azaz mindhárom egyenlő.

- Ez a nevezetes Nesbitt-egyenlőtlenség.

Tegyünk még egy lépést a nehezebb feladatok felé a Titu-lemmával!

- Legyenek x és y tetszőleges valós számok, az a és b pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy $$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}.$$
- Milyen esetben teljesül az egyenlőség?
- **Bizonyítás:** Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $ab(a+b)$ számmal.

$$b(a+b)x^2+a(a+b)y^2\geq ab(x+y)^2,$$

$$abx^2+b^2x^2+a^2y^2+aby^2\geq abx^2+2abxy+aby^2,$$

$$a^2y^2-2abxy+a^2y^2\geq 0.$$

- Ekvivalens átalakítások után kaptunk egy teljes négyzetet: $(bx-ay)^2\geq 0,$ tehát igaz az eredeti állítás.
- Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$

Tegyünk még egy lépést a nehezebb feladatok felé a Titu-lemmával!

- Tétel: (Titu-lemma) Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges valós számok, az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pedig pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$
- Milyen esetben teljesül az egyenlőség?
- **Bizonyítás:** n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.
- Az előzőekben $n=2$-re már igazoltuk az állítást.
- Most tegyük fel, hogy $n=k$-ig már igazoltuk és legyen $n=k+1$.

Fel fogjuk használni az indukciós feltevést.

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{x_k^2}{a_k}+\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_k}+\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}\right)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}}.$$

Itt $n=k$ esetét használjuk, itt $n=2$ esetét.

Egyenlőség az indukció miatt $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}$ esetén.

Tegyünk még egy lépést a Titu-lemmával! Alkalmazások

- 1. Legyenek a, b, c tetszőleges pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

- Milyen esetben teljesül az egyenlőség? (Nesbitt másként)
- **Megoldás:** Bővítsük a törteket rendre az $a,\ b,\ c$ pozitív számokkal és alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ca+bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

- Az utóbbiról kell még belátni, hogy legalább $\frac{3}{2}$. Némi rendezés után:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\geq 3ab+3bc+3ca,$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geq 0,$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0.$$

Ekvivalens lépéseket végeztünk. Egyenlőség $a=b=c$ esetén.

Tegyünk még egy lépést a Titu-lemmával! Alkalmazások

- 2. Legyenek a, b, c, d tetszőleges pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$
- Milyen esetben teljesül az egyenlőség?
- **Megoldás:** Vegyük észre, hogy a bal oldalon a számlálóban négyzetek vannak és így azonnal alkalmazható a Titu-lemma:
- $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{a+b+c+d}.$$
- Egyenlőség akkor és csak akkor, ha
- $$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{c}=\frac{4}{d} \Leftrightarrow d=4a,\ c=2a,\ b=a.$$

(Erre a feladatra a lemma használata nélkül egy másik megoldást is adunk az ajánlott feladatoknál.)

Tegyünk még egy lépést a Titu-lemmával!
Alkalmazások

- 3. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyek szorzata 1. Mutassuk meg, hogy
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq \frac{3}{2}.$$
- Milyen esetben teljesül az egyenlőség?
- Megoldás: Írjunk mindegyik számlálóban az 1 helyére $a^2b^2c^2$-et. Egyszerűsítés után alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\frac{a^2b^2c^2}{a^3(b+c)}+\frac{a^2b^2c^2}{b^3(c+a)}+\frac{a^2b^2c^2}{c^3(a+b)}=\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a^2c^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geq \frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

- Hiányzik még annak igazolása, hogy $ab+bc+ca\geq 3.$ Ez pedig következik a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenségből:
$$\frac{ab+bc+ca}{3}\geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}=1.$$
- Az 1995. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladata volt. ☺

- **Irodalom:**

- 1, Ábrahám Gábor: Nevezetes egyenlőtlenségek, MOZAIK Könyvkiadó, 1995.
-
  2, Ábrahám Gábor: Egyenlőtlenségek I.-II., ZALAMAT Alapítvány 2017.-2018.
- 3, Bartha Gábor – Kun Péter: Válogatott fejezetek a matematikából, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönykiadó, 1986.
- 4, Hojoo Lee: Topics in inequalities https://www.isinj.com/mt-usamo/Topics%20in%20Inequalities%201st%20edition%20-%20Hojoo%20Lee%20(2007).pdf
- 5, Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, TYPOTEX Kiadó, 1994.
- 6, Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, TYPOTEX Kiadó, 2000.
- 7, Schultz János: 111 feladat algebrai egyenlőtlenségekre, matek.fazekas.hu

Köszönöm a figyelmet!