Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Katolikus
Pedagógiai
Intézet

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2021. március 19.

Hasonlóság és alkalmazásai

Dobos Sándor
Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

2021. Március 19.

ELSŐ SZINT

- középpontos hasonlósági transzformáció;
- háromszögek hasonlóságának alapesetei;
- párhuzamos szelők tétele.

MÁSODIK SZINT

– szögfelező tétel;
– párhuzamos szelőszakaszok tétele;
– magasság és befogó tétel.

HARMADIK SZINT

- külső szögfelező tétel; Apollónius kör;
- Ceva és Menelaosz tétel;
- pont körre vonatkozó hatványa, körök hatványvonala,
- Ptolemaiosz tétel.

NEGYEDIK SZINT

- forgatvanyújtások;
- Carnot tétel; Menelaosz tétel általánosítása;
- Casey tétel
- …….

FELADATOK

Horvay Katalin-Reiman István

Geometria Feladatgyűjtemény I.

FELADATOK

Horvay Katalin-Reiman István

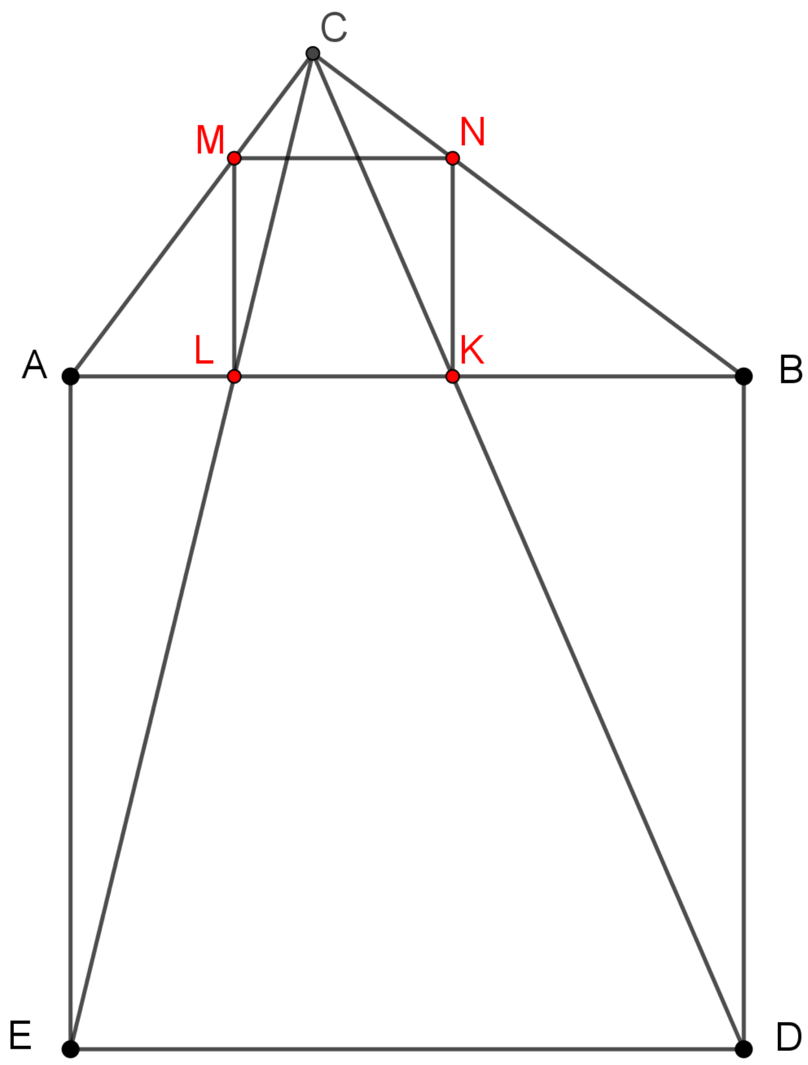
Geometria Feladatgyűjtemény I.

232 feladat !!!

1. FELADAT

Az *ABC* háromszög oldalai *AB*=5, *BC*=4, *CA*=3. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek két csúcsa az *AB* oldalon van, egy-egy pedig a *BC* és *CA* oldalon. Állapítsuk meg a négyzet oldalának hosszát.

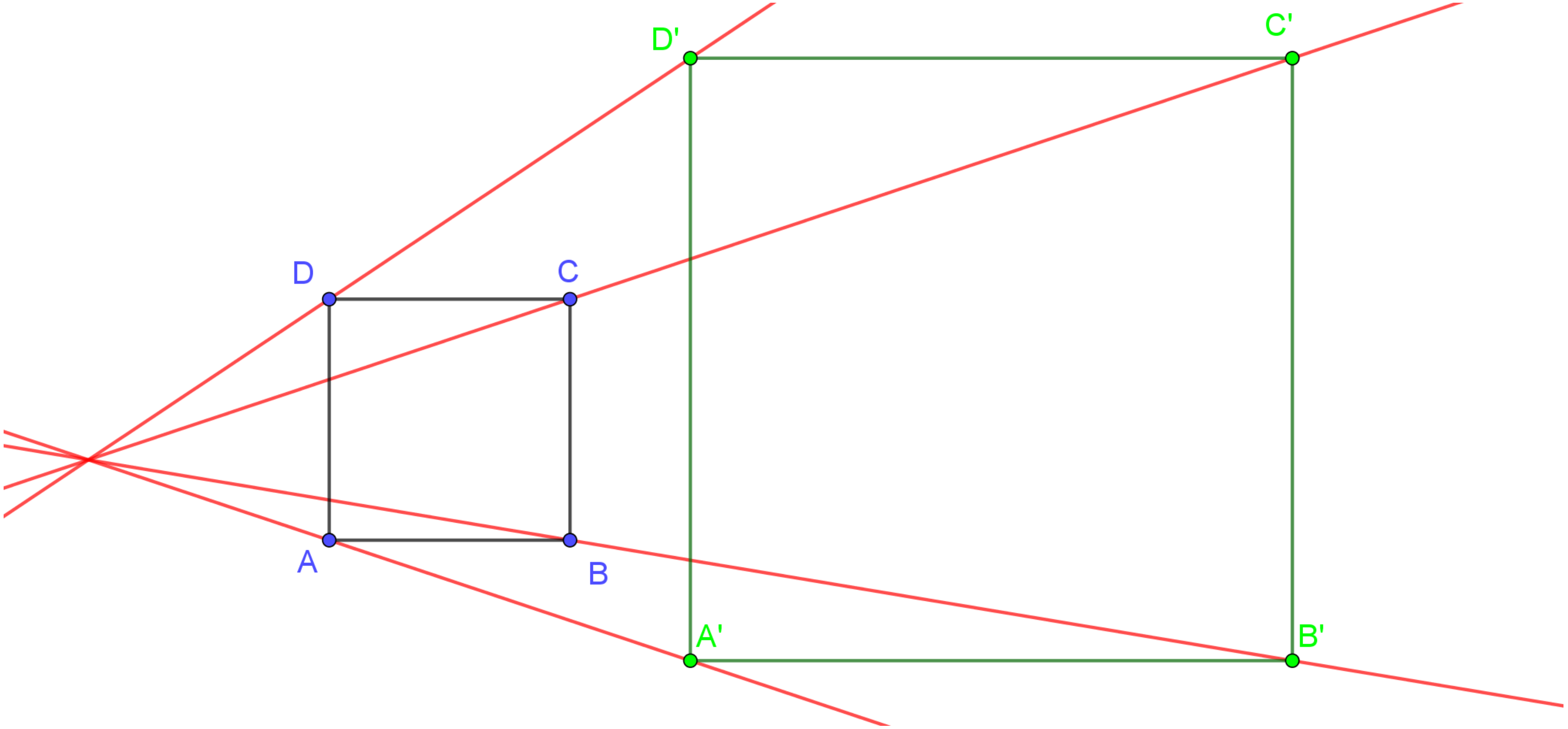
1. FELADAT MEGOLDÁSA



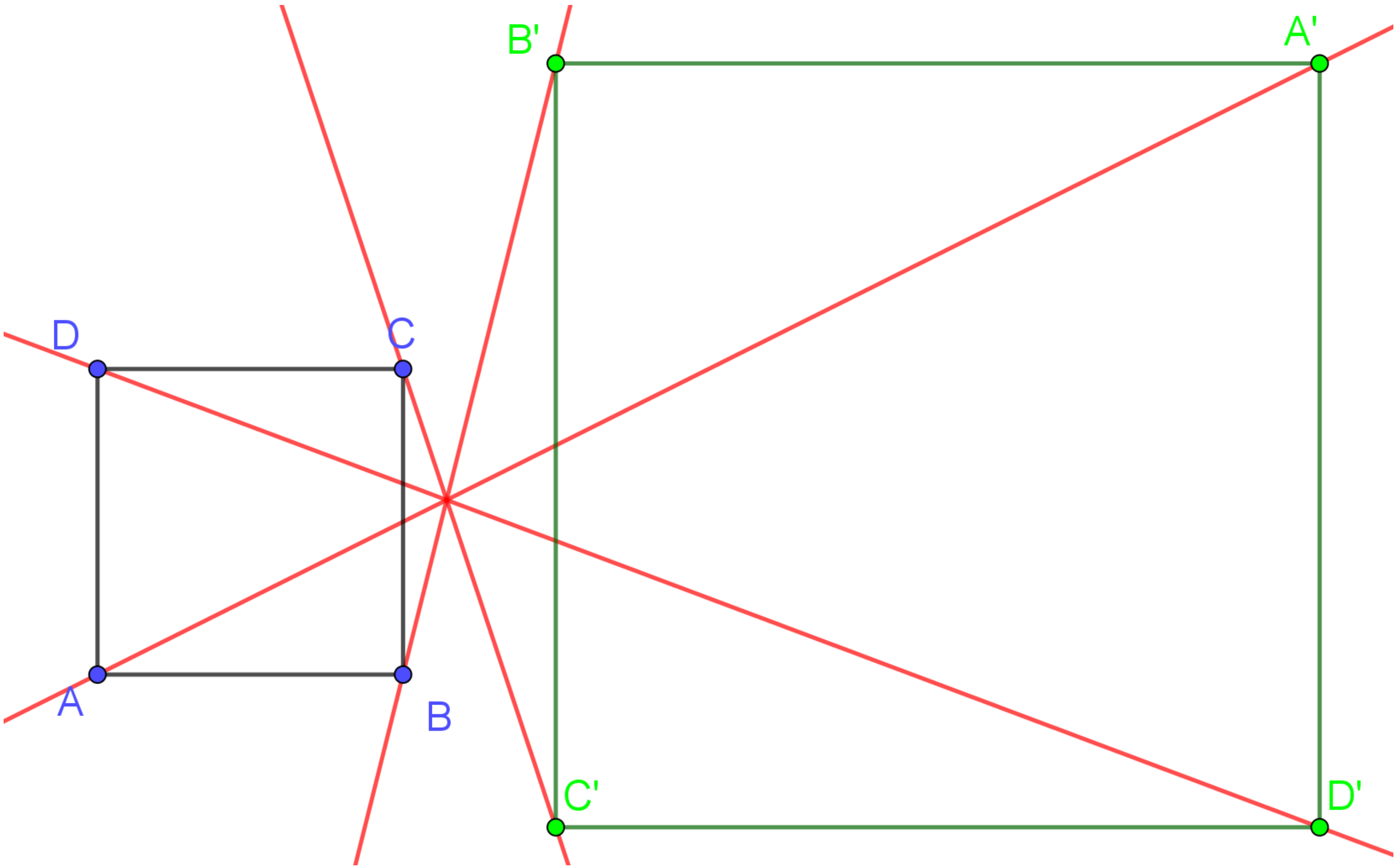
2. FELADAT

A, B és A', B' olyan pontok, hogy az AB és $A'B'$ párhuzamosak és $AB \neq A'B'$. Megrajzoljuk az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzeteket, amelyek azonos körüljárásúak. Igazoljuk, hogy az AA', BB', CC', DD' egyenesek egy ponton mennek át.

2. FELADAT MEGOLDÁSA



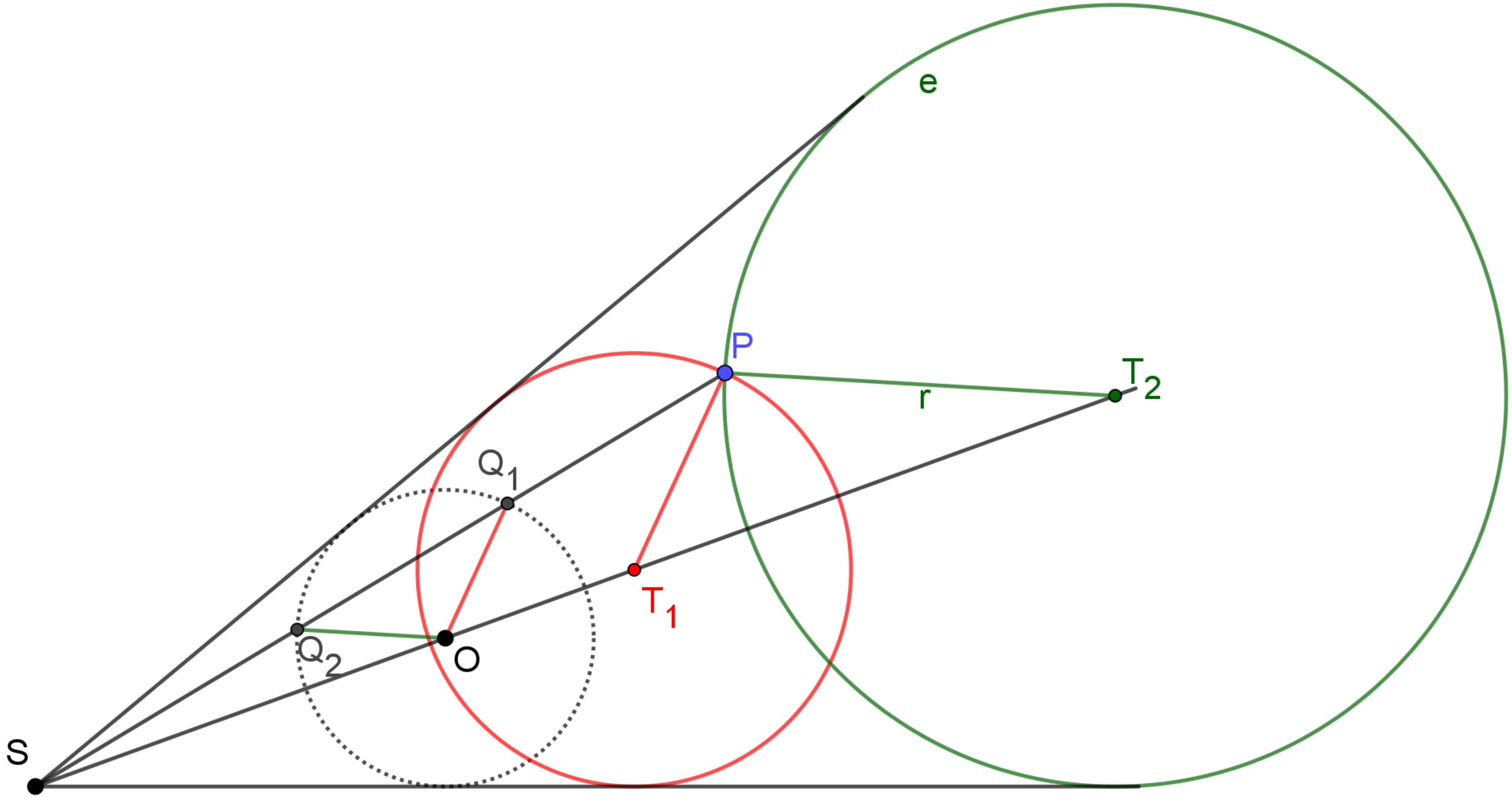
2. FELADAT MEGOLDÁSA



3. FELADAT

Adott egy szög szárai között egy *P* pont. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti a szög szárait és átmegy a *P* ponton.

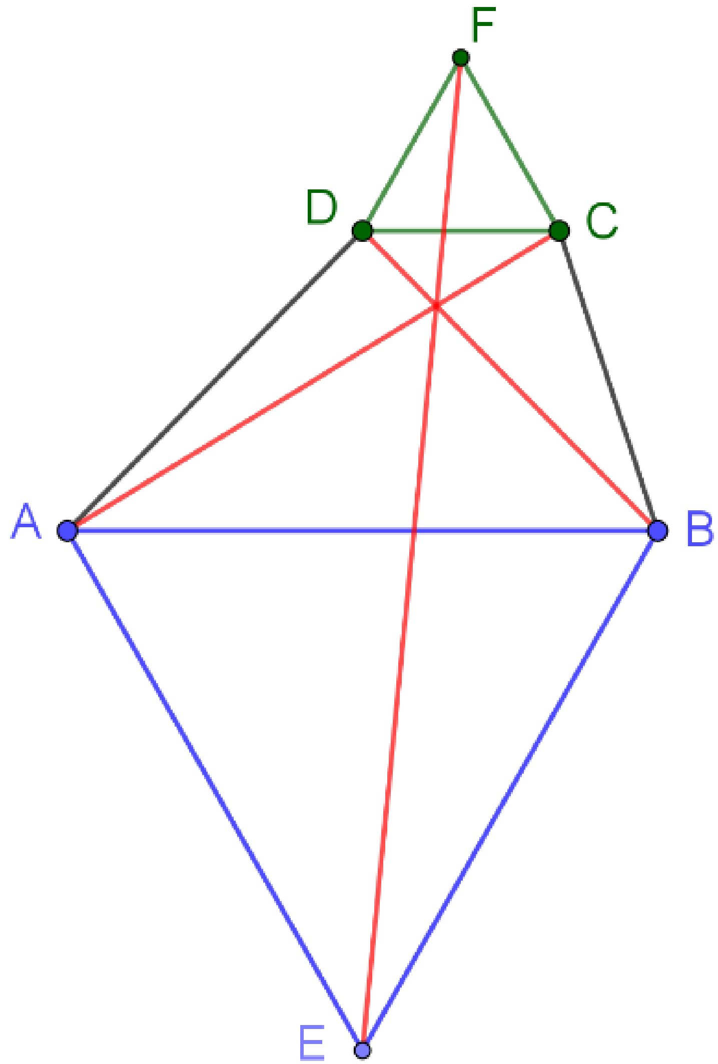
3.FELADAT MEGOLDÁSA



4. FELADAT

Az $ABCD$ trapézban AB és CD párhuzamosak. Ezekre kifele szerkesztjük az ABE és CDF szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy EF áthalad az átlók metszéspontján.

4. FELADAT MEGOLDÁSA

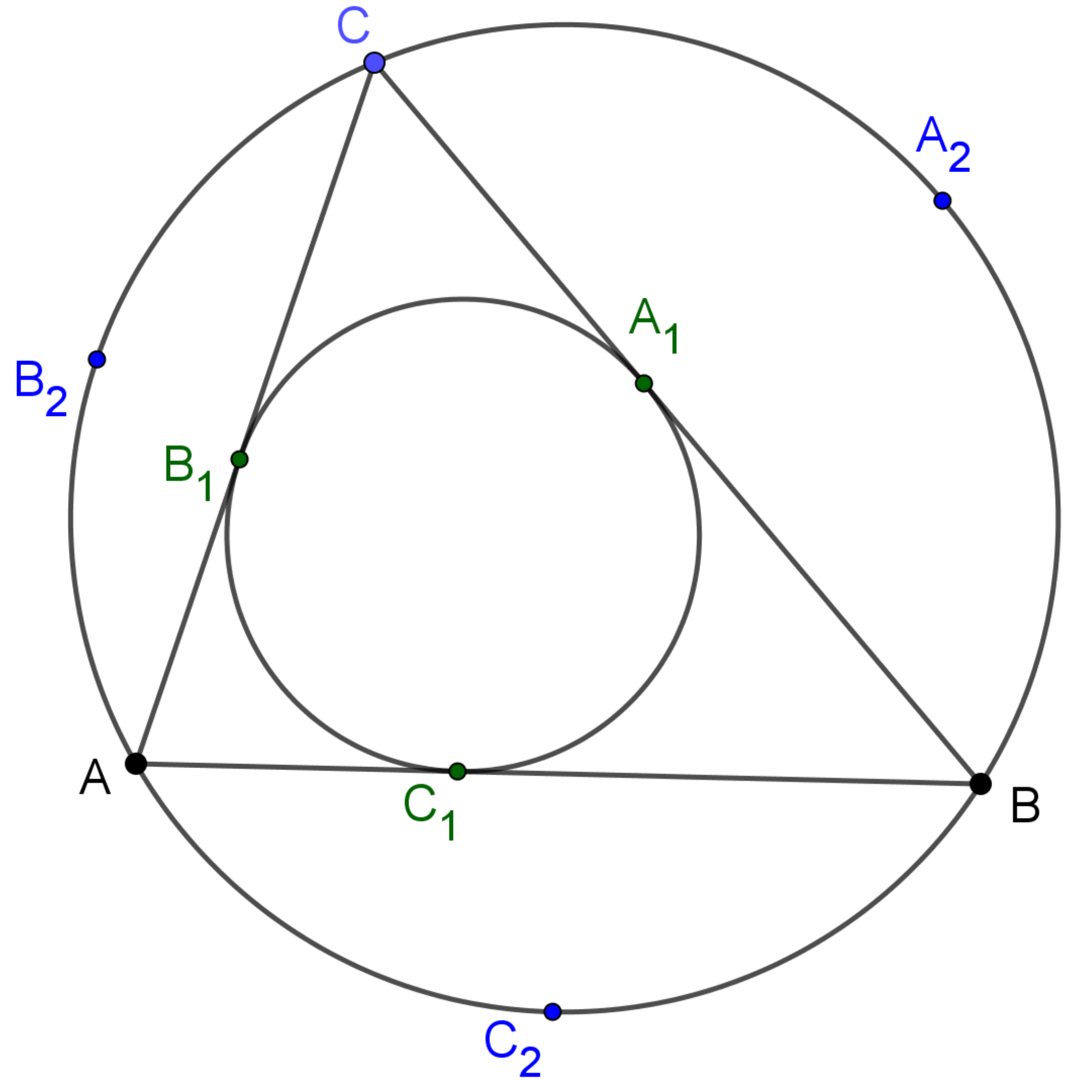


5. FELADAT

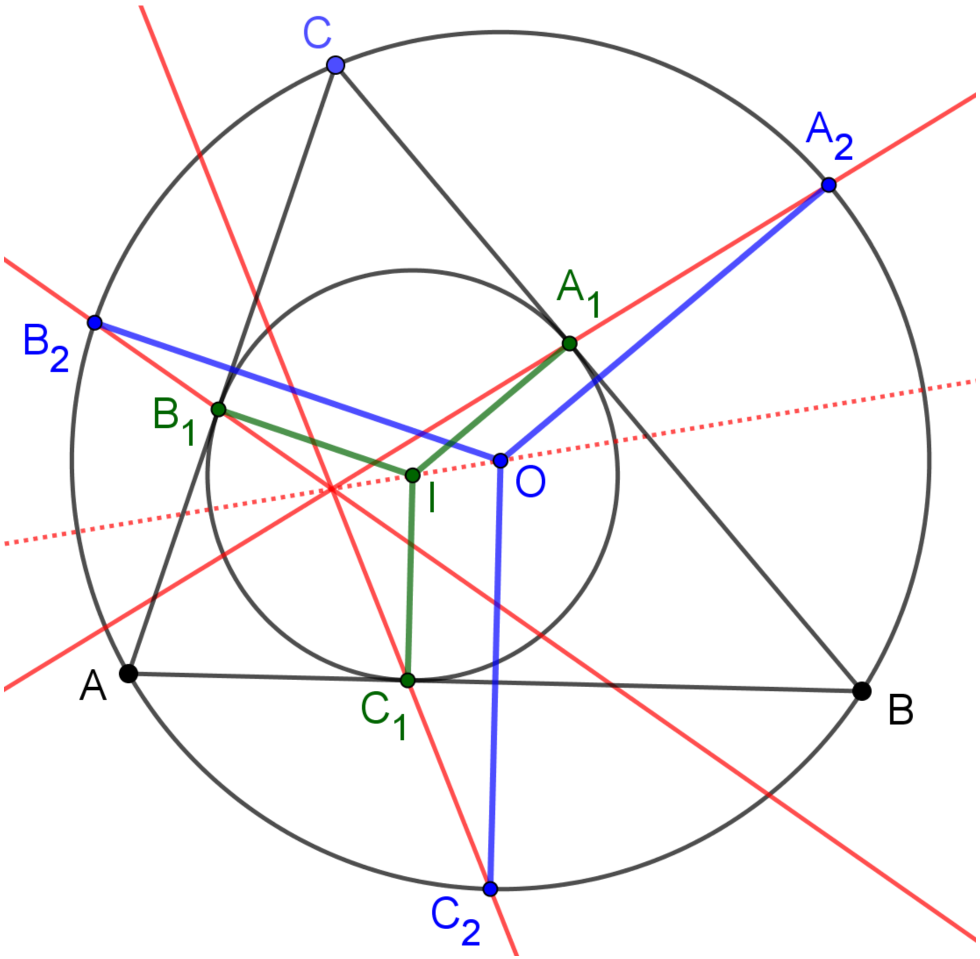
Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre az A_1, B_1, C_1, pontokban érinti. Az ABC köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja A_2, hasonlóan definiáljuk a B_2 és C_2 pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

OKTV 1997.II. kategória, 2.forduló 2. példa

5. FELADAT MEGOLDÁSA



5. FELADAT MEGOLDÁSA

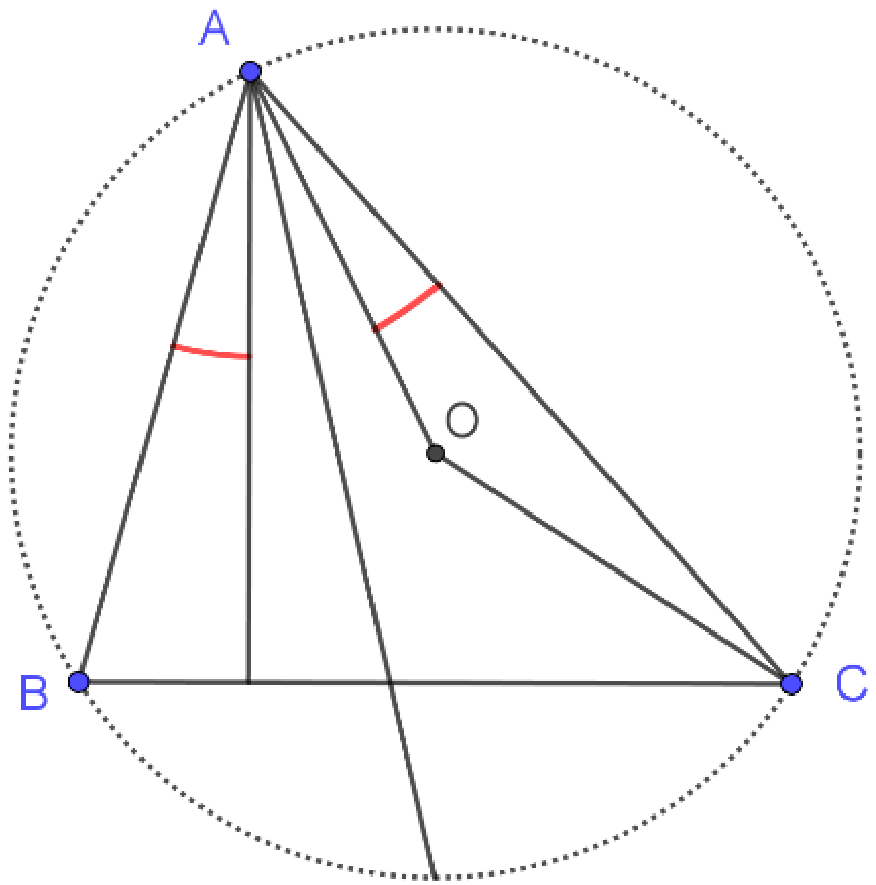


6. FELADAT

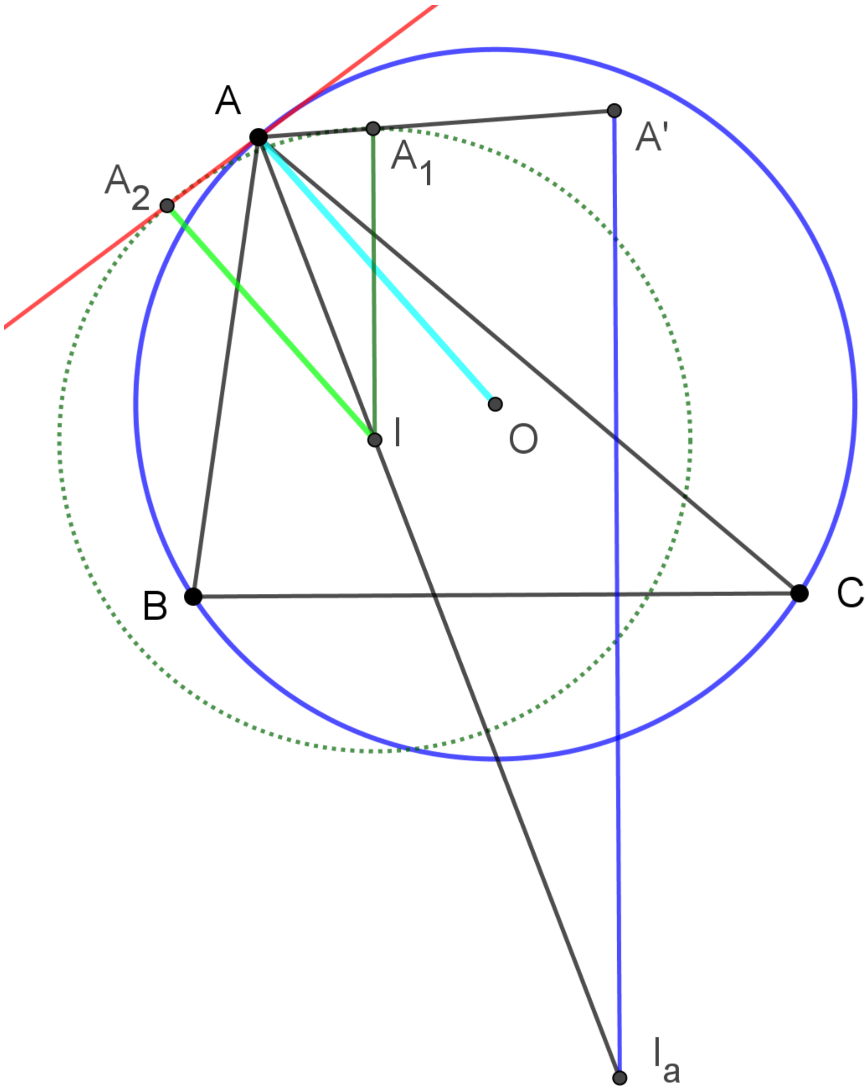
Legyen az *ABC* háromszögbe írt kör középpontja *I*, a köré írt kör középpontja *O*. A *BC* oldalhoz hozzáírt kör középpontjának tükörképe a *BC* oldalra legyen *A'*, az *AA'* egyenes tükörképe az *A*-ból induló szögfelezőre legyen ℓ_a. Hasonlóan definiáljuk ℓ_b-t. Igazoljuk, hogy az ℓ_a és ℓ_b egyenesek metszéspontja rajta van az *OI* egyenesen.

Olimpiai válogatóverseny, Kecskemét, 2017

6. FELADAT MEGOLDÁSA



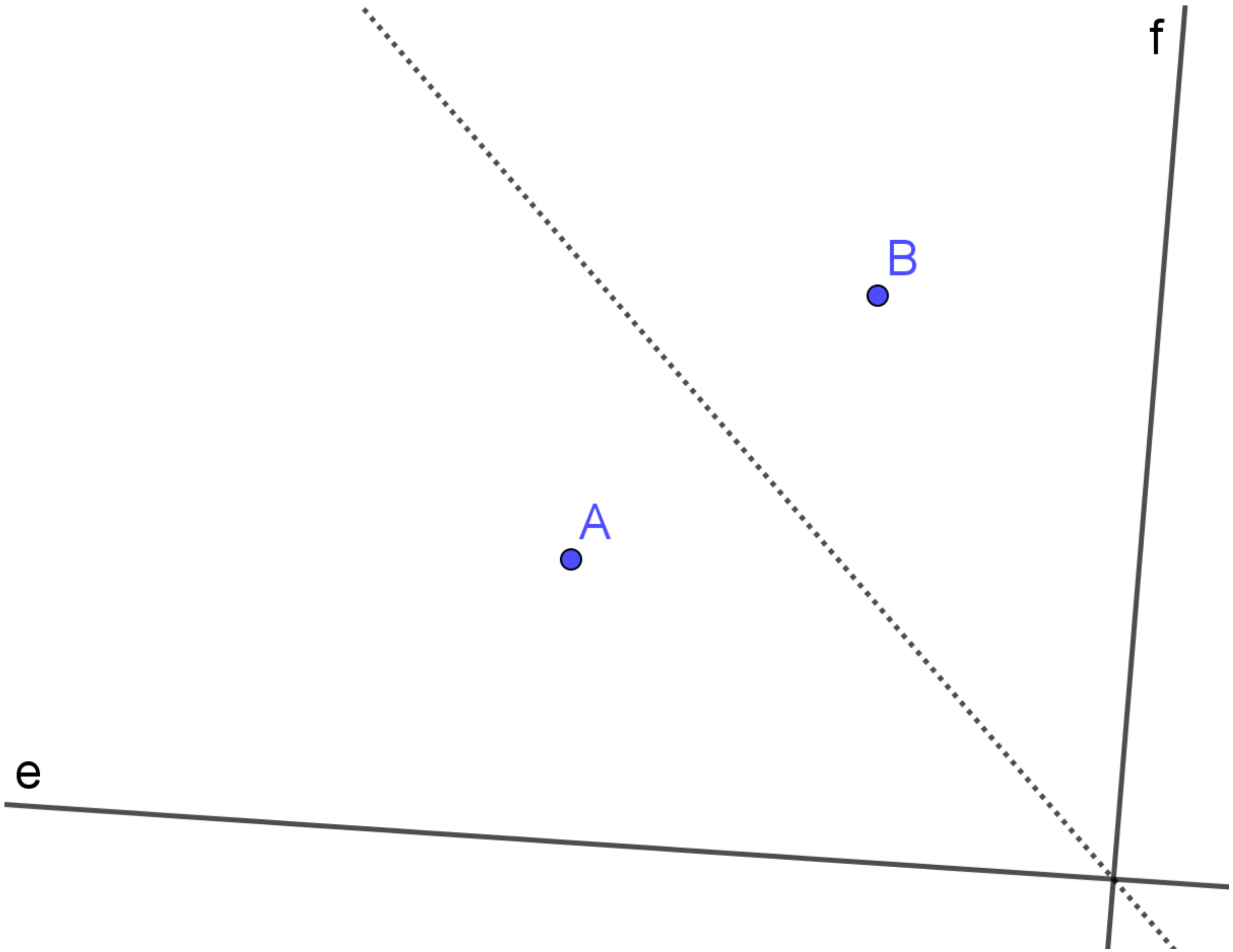
6. FELADAT MEGOLDÁSA



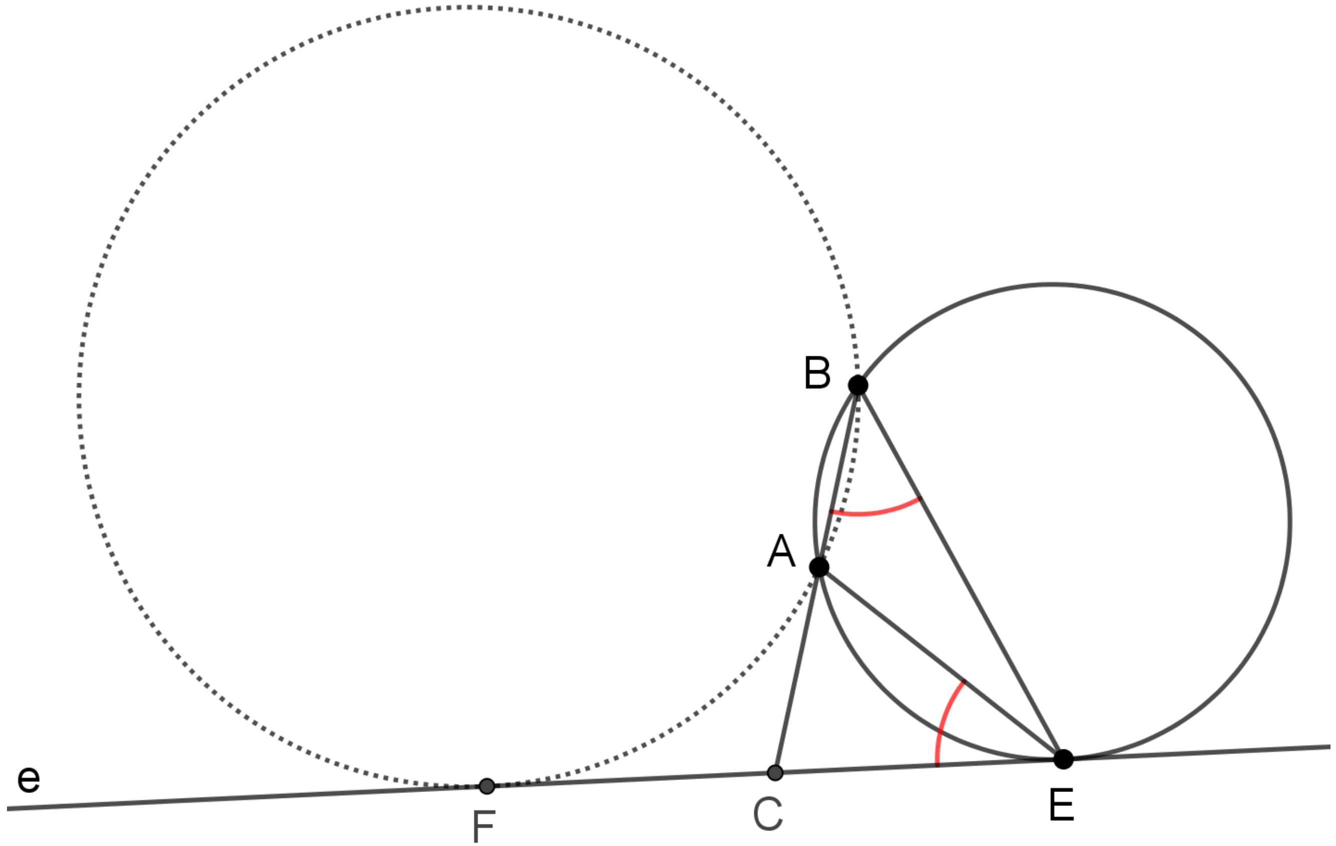
7. FELADAT

- Adott egy *e* egyenes, egyik oldalán két pont *A* és *B*. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti az *e* egyenest és áthalad a két ponton.

7. FELADAT MEGOLDÁSA



7. FELADAT MEGOLDÁSA



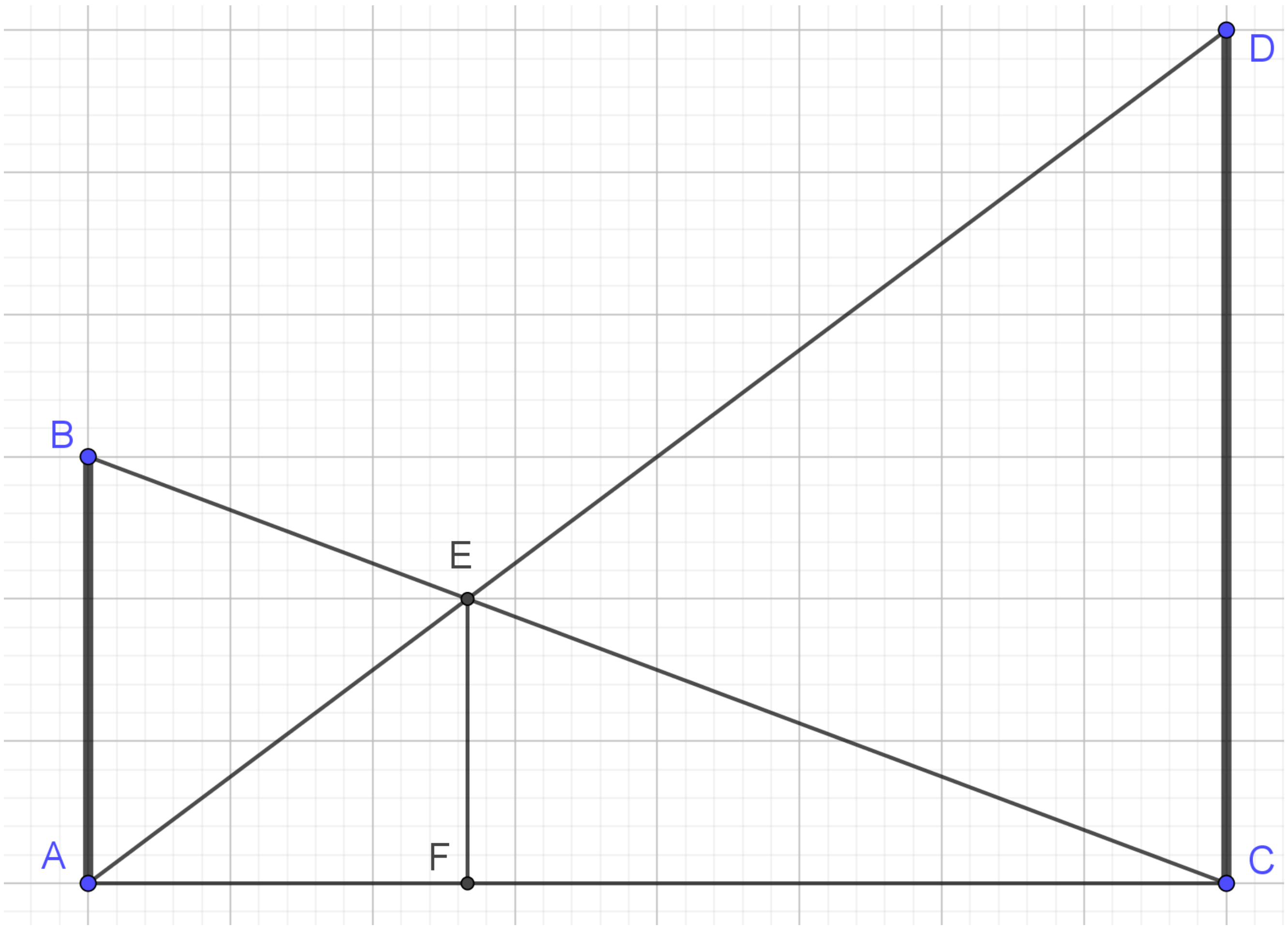
7. FELADAT FOLYTATÁSA

- Apollonius féle probléma: tekintsünk három alakzatot, amelyek mindegyike lehet pont, kör, vagy egyenes. Szerkesztendő olyan kör, aminek mindhárom alakzattal egyetlen közös pontja van.

8. FELADAT

- A vízszintes talajon áll két függőleges rúd. Az egyik 3, a másik 6 méter magas. Egy egyenes drótkötél feszül ki minkét rúd aljától a másik tetejéig. Milyen magasan van a feszítő kötelek találkozási pontja?

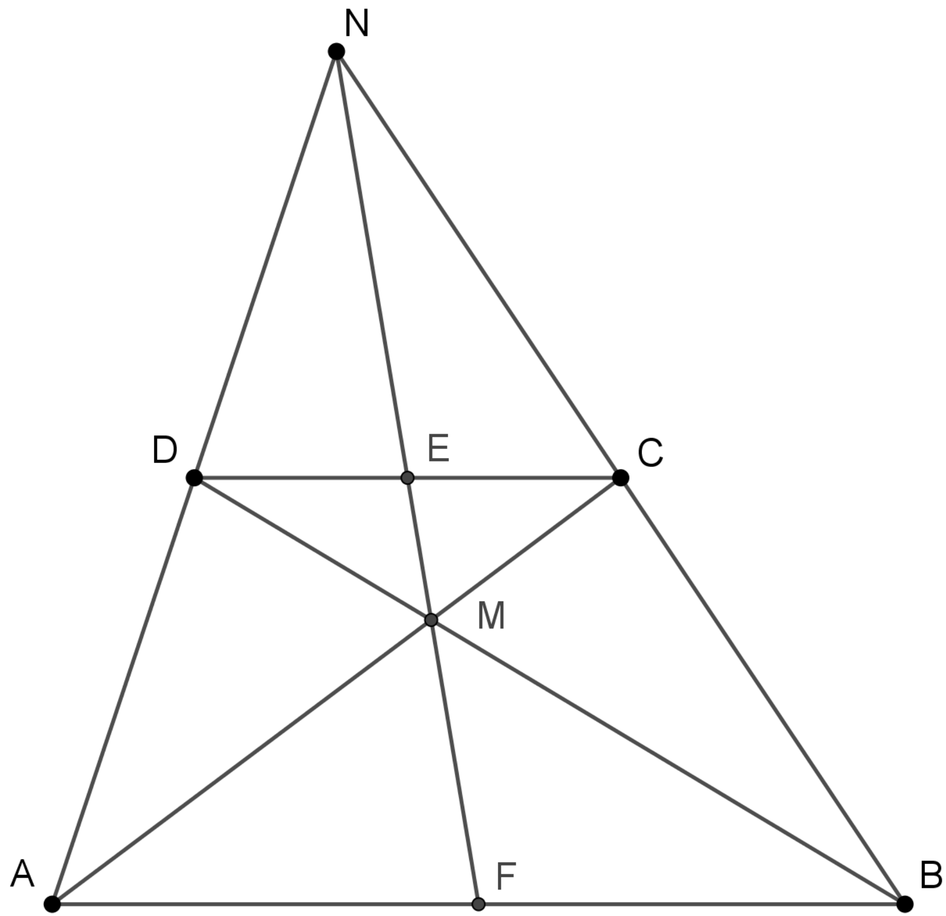
8. FELADAT MEGOLDÁSA



9. FELADAT

Legyen az *ABCD* trapéz átlóinak metszéspontja *M*, a szárak egyeneseinek metszéspontja *N*. Bizonyítsuk be, hogy az *MN* egyenes felezi a trapéz alapjait.

9. FELADAT MEGOLDÁSA



10. FELADAT

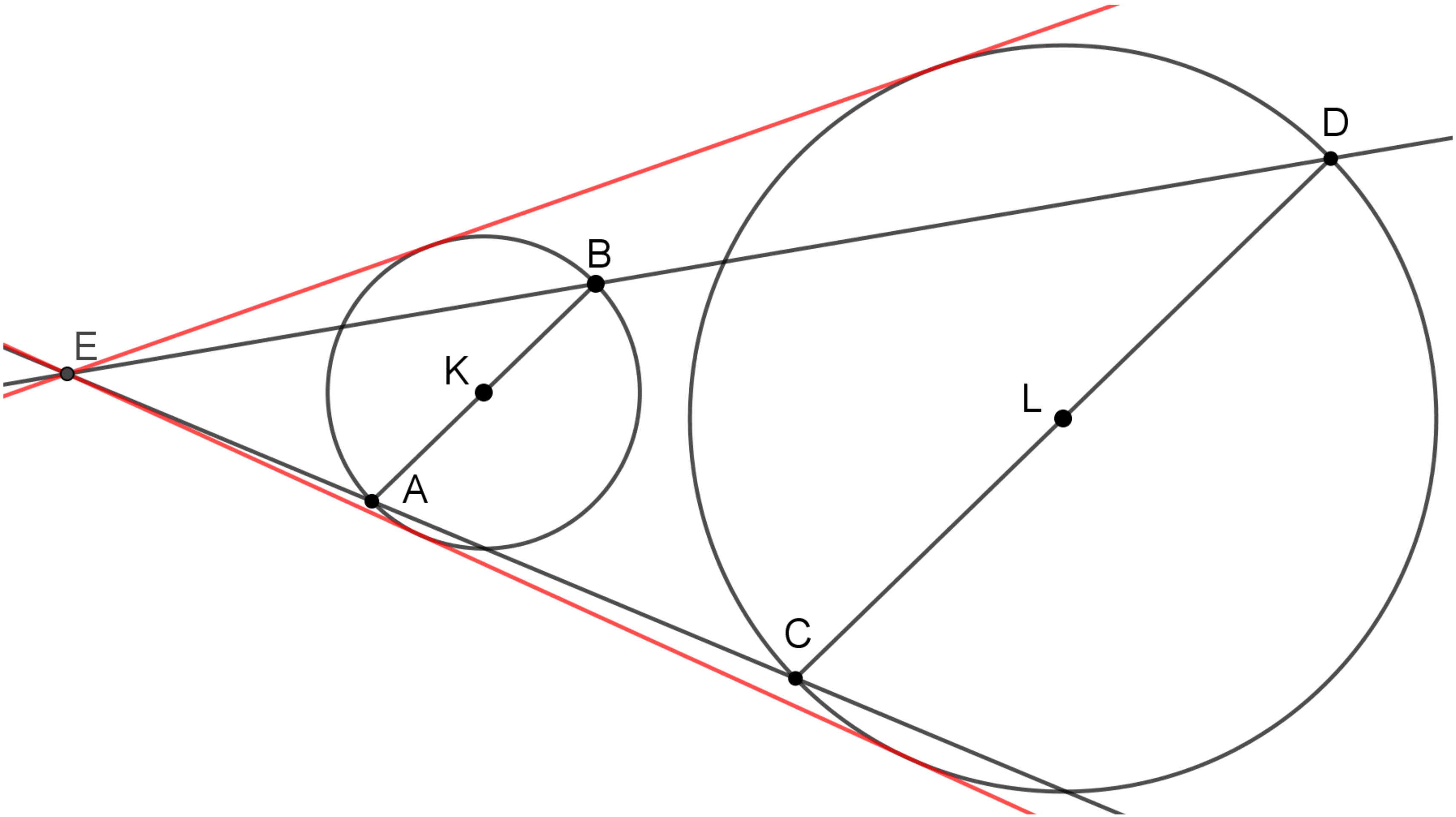
(a) Adott két pont A és B és egy AB-vel párhuzamos egyenes. Csak vonalzóval szerkesszük meg az AB felezőpontját.

(b) Adott az AB szakasz az F felezőpontjával, továbbá egy C pont, amely nincs az AB egyenesen. Csak vonalzóval szerkesszünk C-n át AB-vel párhuzamost.

11. FELADAT

Adott két diszjunkt, különböző sugarú kör a középpontjaikkal. Csak vonalzóval szerkesszük meg közös külső érintőiknek a metszéspontját.

11. FELADAT MEGOLDÁSA

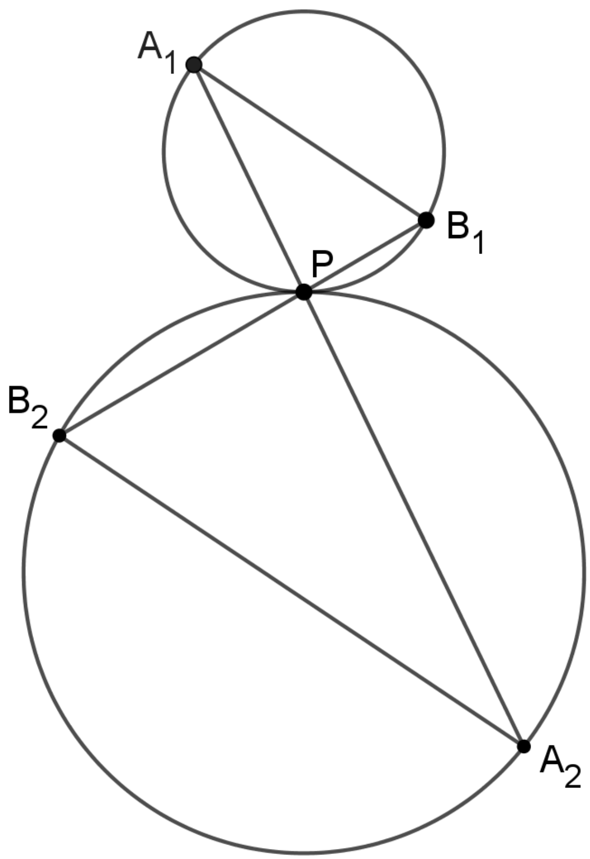


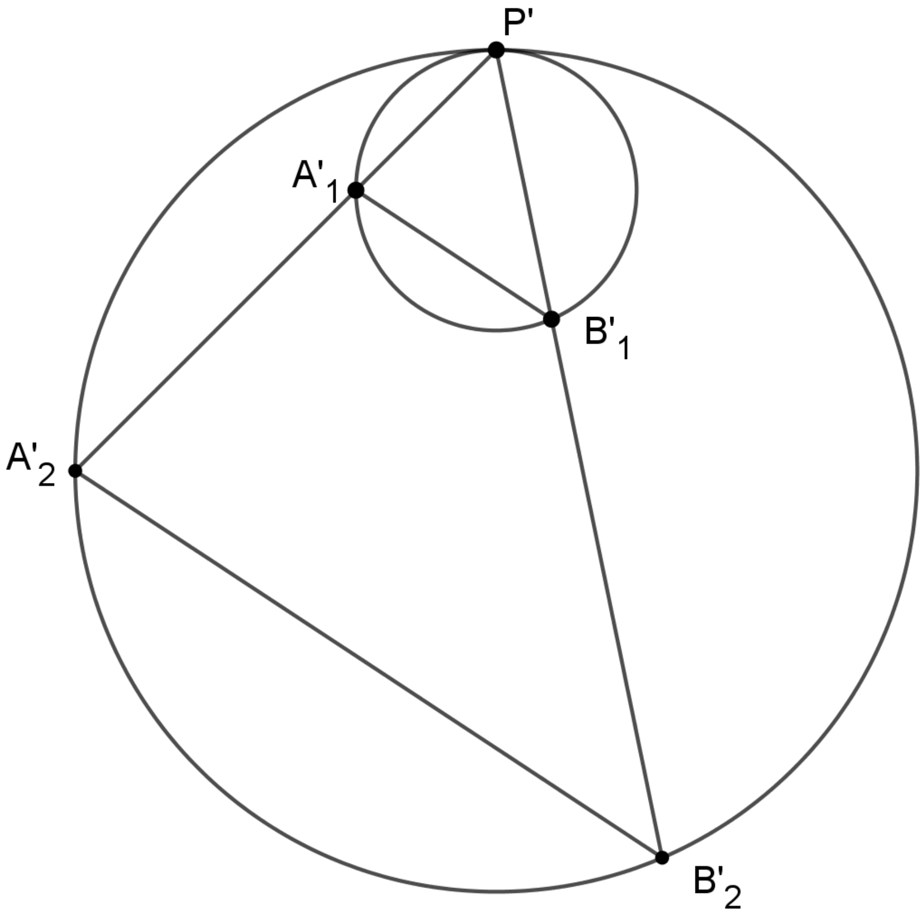
12. FELADAT

A k_1 és k_2 körök egymást P-ben érintik. Messe egy P-n átmenő szelő P-n kívül k_1-et még A_1-ben és k_2-t még A_2-ben; továbbá egy P-n átmenő másik szelő k_1-et B_1-ben és k_2-t B_2-ben. Bebizonyítandó, hogy PA_1B_1 és PA_2B_2 háromszögek hasonlók.

Kürschák verseny 1933. 3. feladat

12. FELADAT MEGOLDÁSA



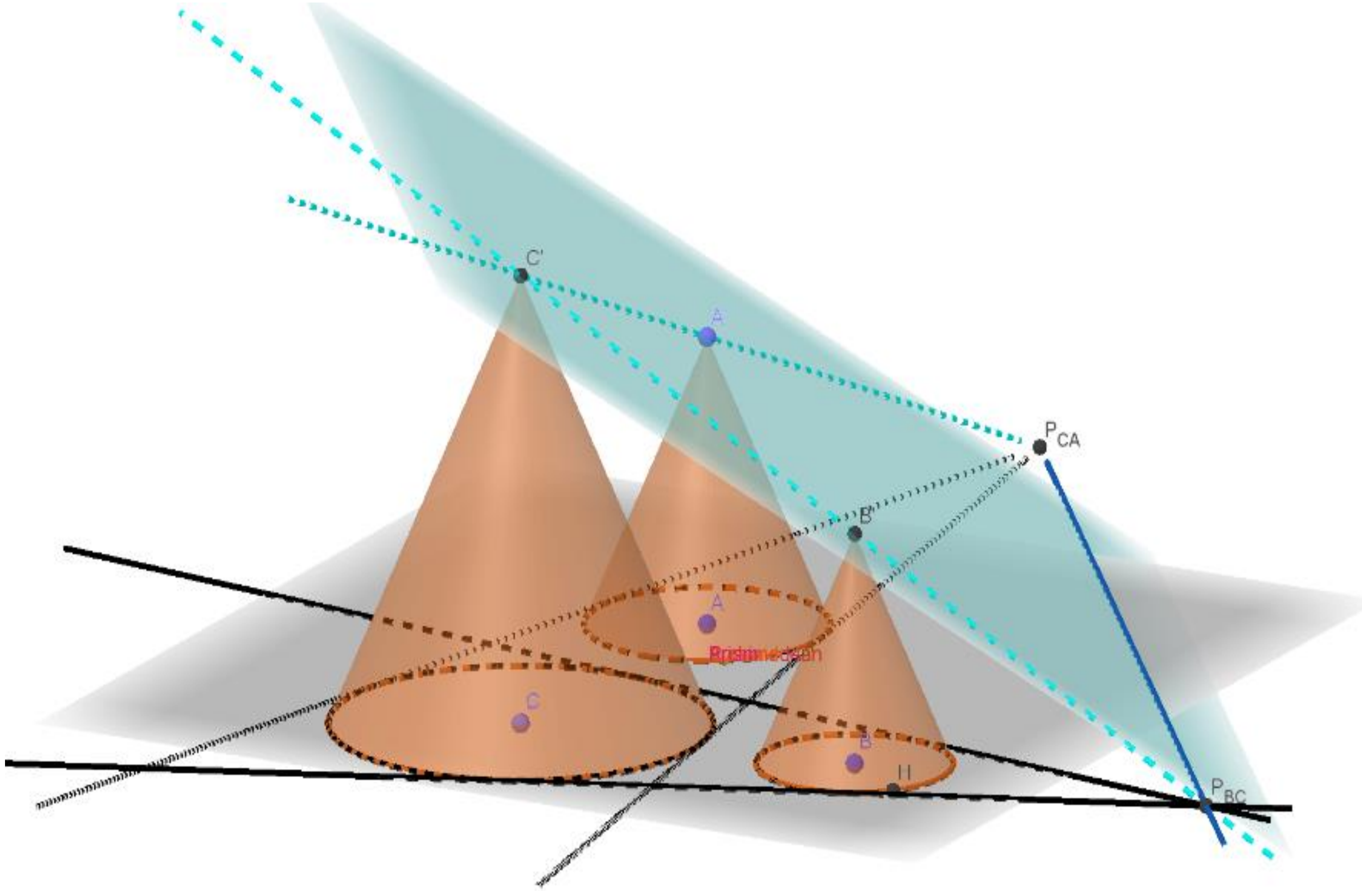


13. FELADAT

Adott három kör k_A, k_B, k_C egyik sincs a másik belsejében. Legyen a k_A és k_B körök külső hasonlósági pontja P_{AB}, hasonlóan definiáljuk a P_{BC} és P_{CA} pontokat. Igazoljuk, hogy ez a három pont egy egyenesen van. (Monge-féle három kör tétel)

MONGE TÉTEL

-

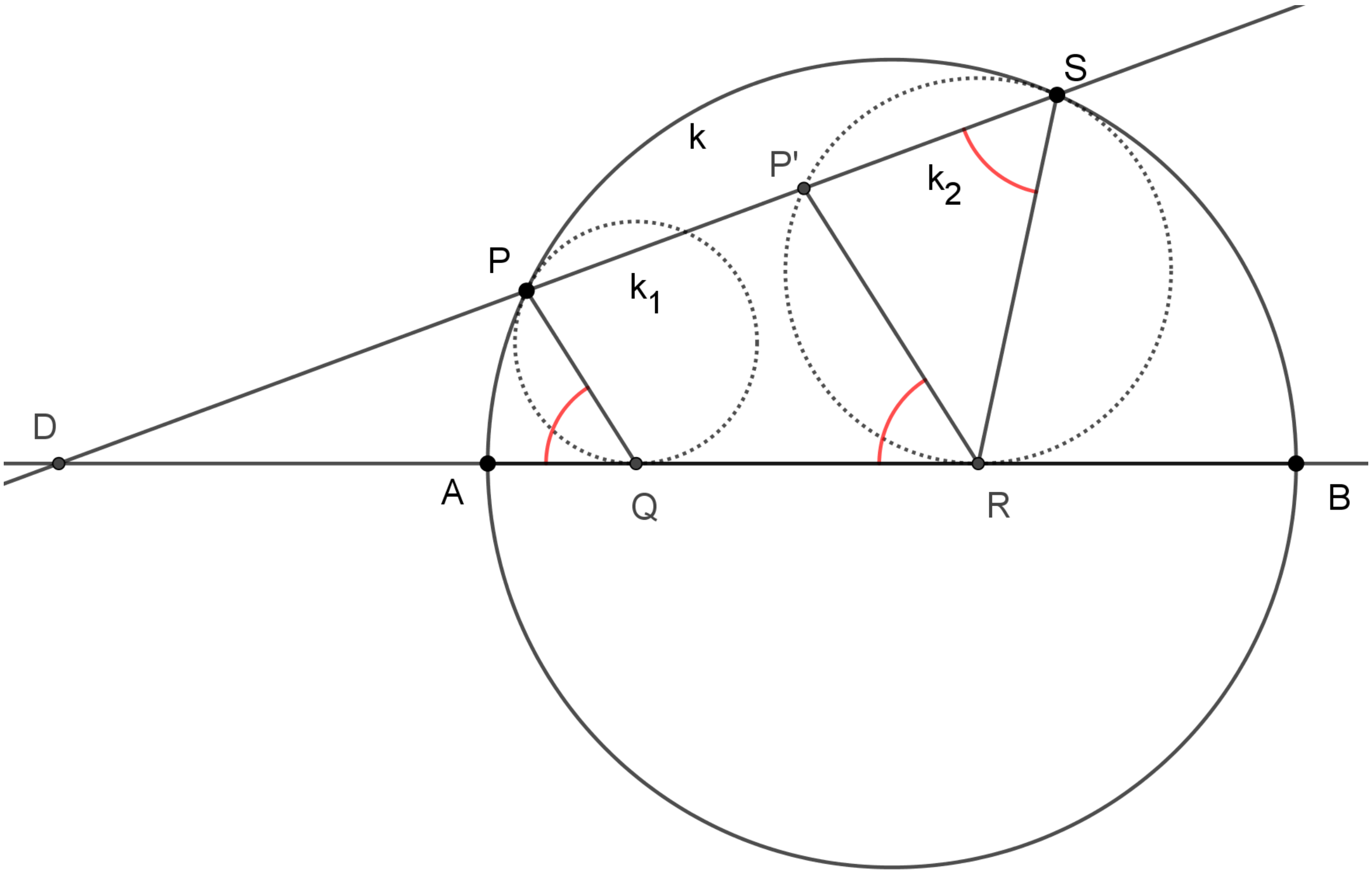


14. FELADAT

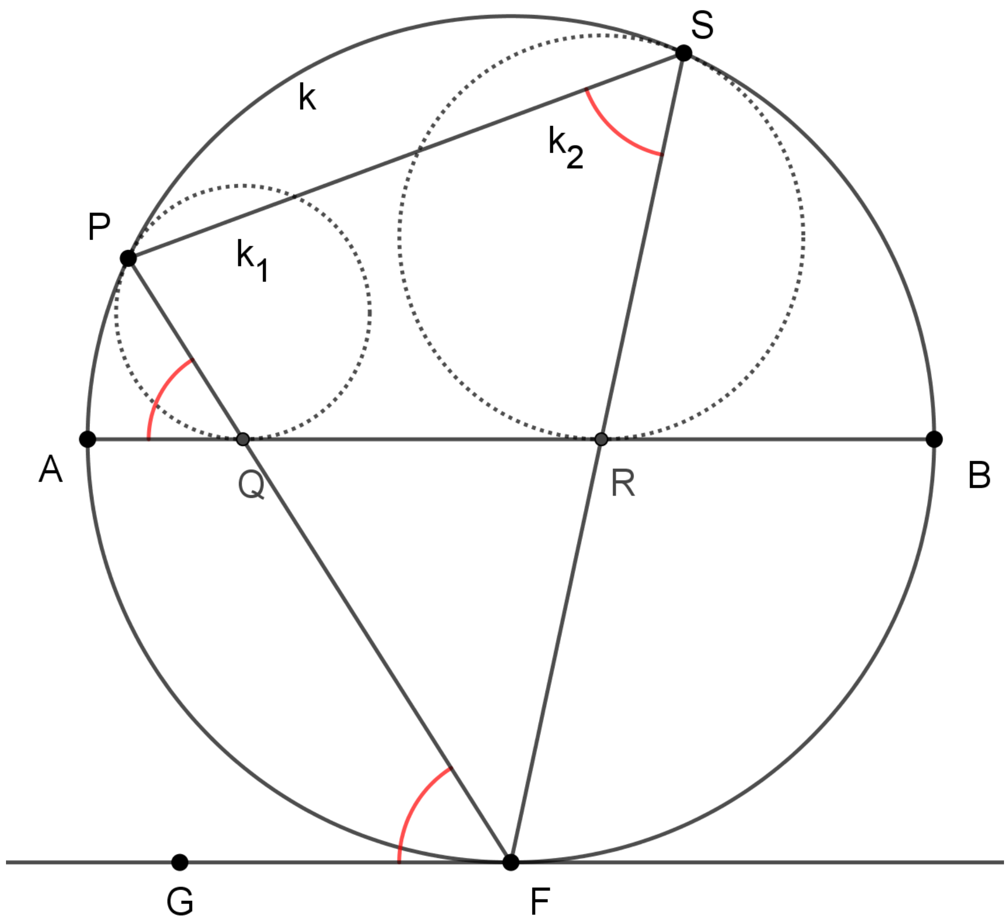
Adott a k kör és annak egy AB átmérője.
A k_1 és k_2 körök az AB által meghatározott egyik félkör belsejében helyezkednek el; k_1 a k kört a P pontban, AB-t a Q pontban érinti; ugyanígy k_2 a k kört az S, az AB-t pedig az R pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög húrnégyszög.

2001-2002. OKTV 2001-02. II. kategória 1. forduló 5. feladat

14. FELADAT MEGOLDÁSA



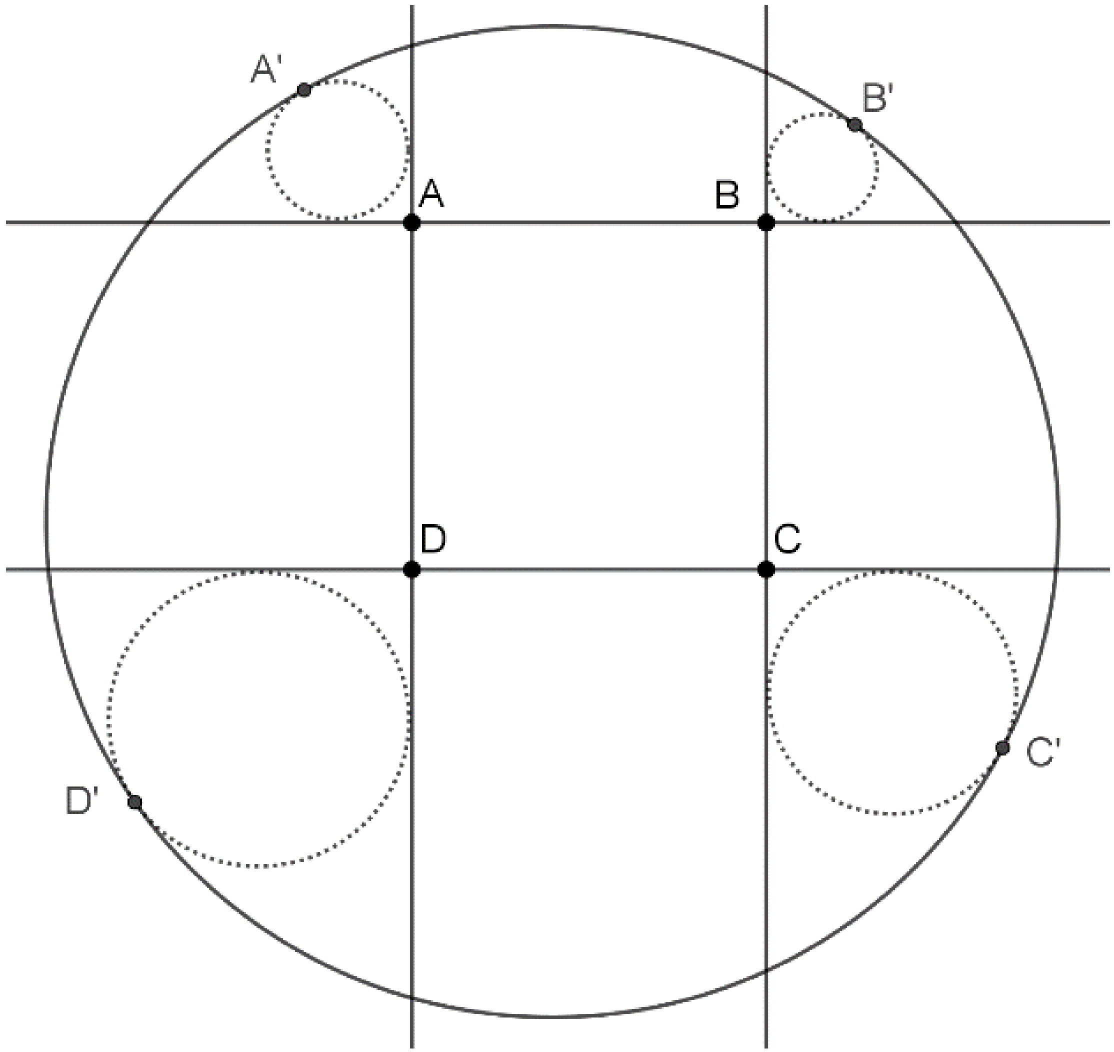
14. FELADAT MEGOLDÁSA



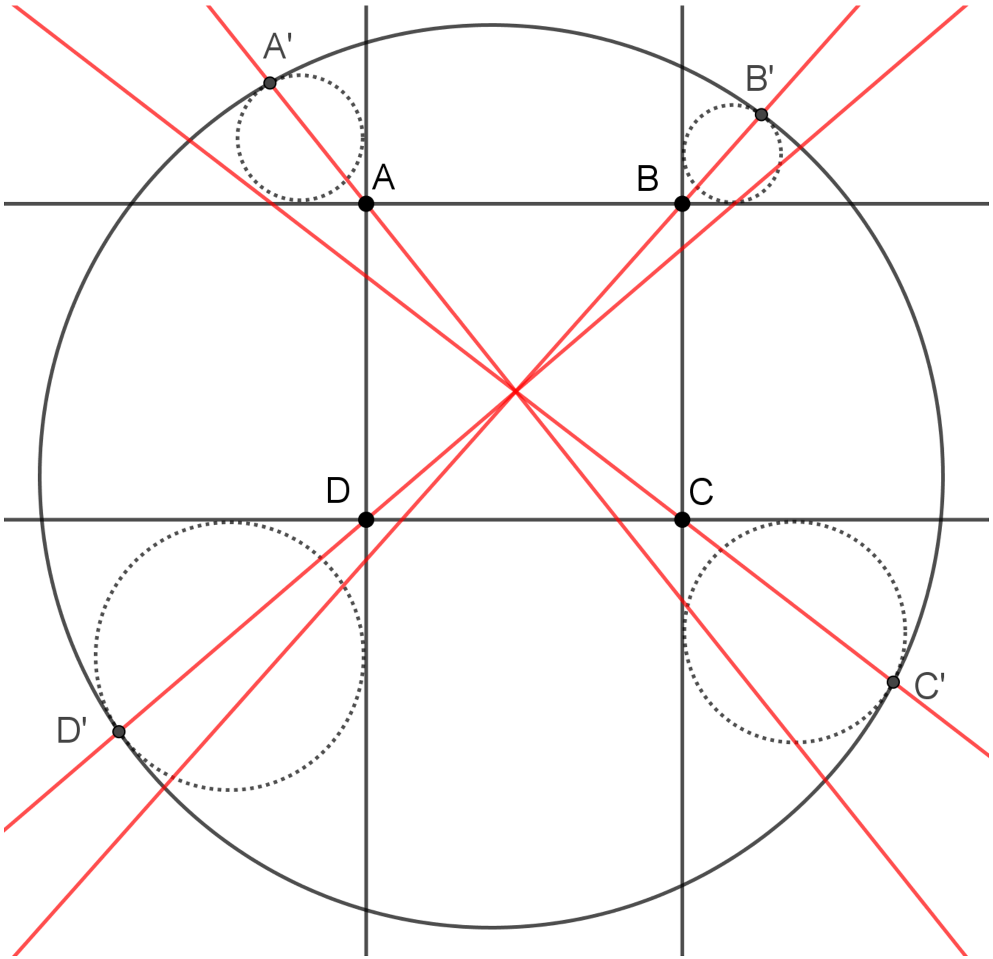
15. FELADAT

A *k* kör belsejében van az *ABCD* négyzet. Tekintsük azt a kört, amely belülről érinti *k*-t és érinti az *AB* és *AD* egyenesek *A*-ból induló *B*-t és *D*-t nem tartalmazó felét, ez a kör *k*-t *A*'-ben érinti. Hasonlóan kapjuk *B*', *C*' és *D*' pontokat. Igazoljuk, hogy *AA*', *BB*', *CC*' és *DD*' egy ponton mennek át.

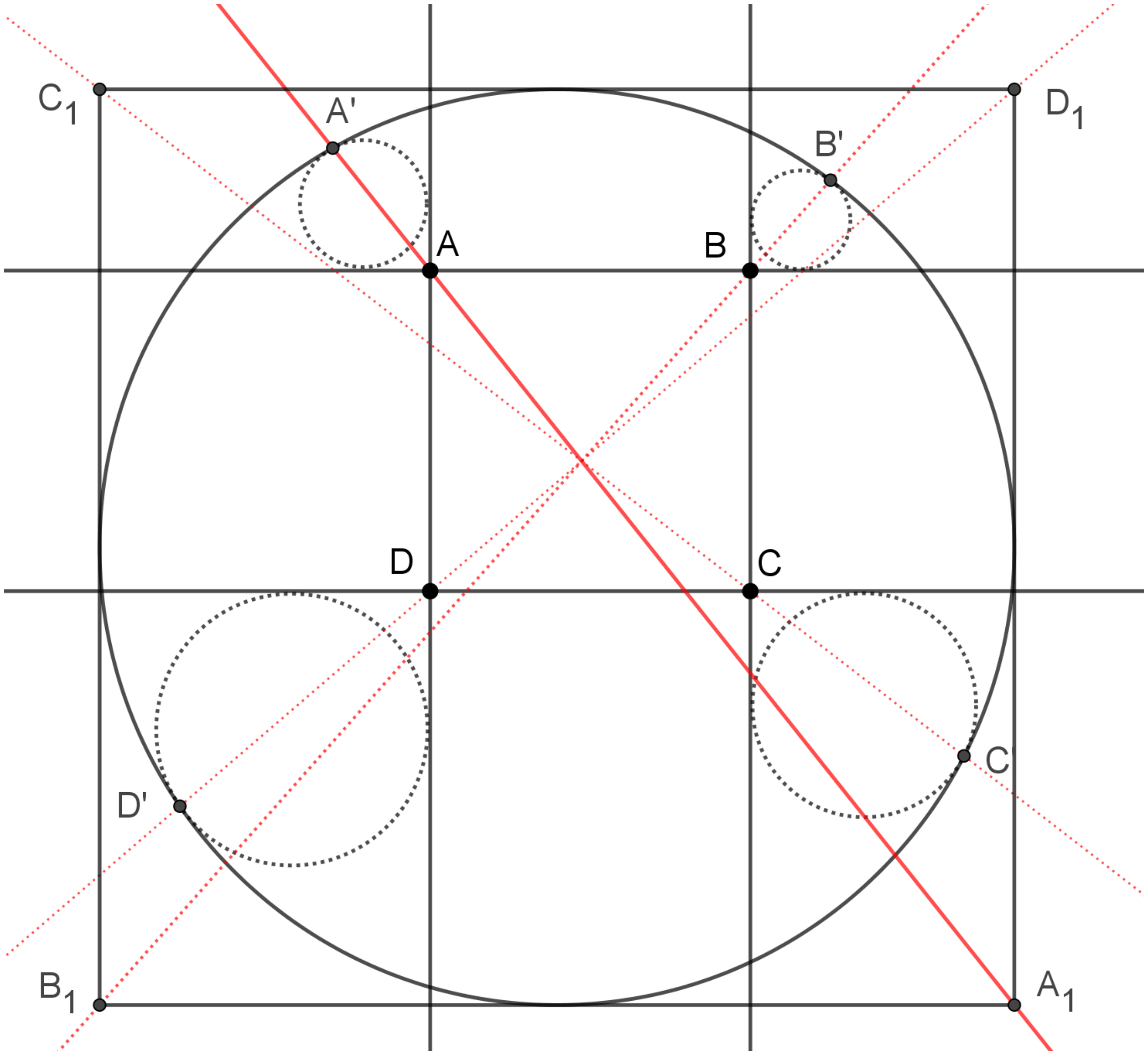
15. FELADAT MEGOLDÁSA



15. FELADAT MEGOLDÁSA



15. FELADAT MEGOLDÁSA



ÖSSZEFOGLALÁS

- Két alakzat középpontosan hasonló. Vegyük észre! Használjuk ki!
  - szerkesztés
  - számolás
  - bizonyítás

Köszönöm a figyelmet!