

Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2022/23. DÖNTŐ
11. évfolyam

Kedves Versenyző!

Gratulálok eddigi eredményedhez! Ebben a fordulóban hat feladatot kell megoldanod. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg, íróeszközön kívül számológépet és függvénytáblát lehet használni. A megoldás során mindent írd le, ami a megoldáshoz kapcsolódik. 90 perc áll rendelkezésedre. Minden feladatot külön lapra dolgozz ki, melyre legyen felírva a kódszámod és a feladat sorszáma. Jó munkát kívánok!

1. Egy háromszög oldalai 4, 8 és 10 cm. A háromszög oldalait el metszük az oldalakkal párhuzamos 1-1 egyenessel úgy, hogy a hat metszéspont egy olyan hatszöget alkot, melynek oldalai egyenlő hosszúak. Mekkora a hatszög területének pontos értéke? **12 pont**

2. Határozd meg a valós számok legbővebb részhalmozán értelmezett $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}|x+2| - |3-x| + 5\right)$ kifejezés szélsőértékét! **15 pont**

3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x + \log_{20}(5^x + 1) = x \log_{20} 4 + 1$$

12 pont

4. Egy háromszög két csúcspontja $A(6; -5), B(3; 7)$. A C csúcs rajta van az $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 8 = 0$ egyenletű körön. Számítsd ki a C pont koordinátáit úgy, hogy a háromszög területe a lehető legkisebb legyen! **12 pont**

5. Határozd meg az $x \cdot y$ szorzat értékét, ha x és y olyan egymástól különböző valós számok, amelyekre teljesül, hogy $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy}$! **9 pont**

6. Határozd meg p valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$x^4 - 3x^2 + 100 + px^2 + p^2 + 20p = 0$$

egyenletnek négy különböző valós gyöke legyen! Lehetséges-e, hogy a négy valós gyököt növekvő sorrendbe rendezve, a tagok különbsége ugyanannyi legyen? **20 pont**