

Katolikus Középiskolák Matematika Versenye
2022/23. DÖNTŐ
12. évfolyam

Kedves Versenyző!

Gratulálok eddigi eredményedhez! Ebben a fordulóban hat feladatot kell megoldanod. A feladatokat tetszőleges sorrendben oldhatod meg, íróeszközön kívül számológépet és függvénytáblát lehet használni. A megoldás során mindent írd le, ami a megoldáshoz kapcsolódik. 90 perc áll rendelkezésedre. Minden feladatot külön lapra dolgozz ki, melyre legyen felírva a kódszámod és a feladat sorszáma. Jó munkát kívánok!

1. Határozd meg a valós számok legbővebb részhalmozán értelmezett, $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}|x+2| - |3-x| + 5\right)$ kifejezés szélsőértékét! **15 pont**
2. Andi, Bandi, Cili és Dani testvérek. Dani, a legfiatalabb azt mondta, hogy születési éveiket, ha növekvő sorrendbe rendezzük, akkor a számok különbsége állandó. Bandi, akinek van egy nővére és egy húga, azt állítja, hogy 15 évvel ezelőtt a testvéreinek életkorát növekvő sorrendbe rendezve a kapott számok egy mértani sorozat szomszédos elemei voltak. Andi a legidősebb azt mondja, hogy testvérei jelenlegi életkorának összege az ő életkorának a $\frac{7}{3}$ -szorosa. Melyik évben születhetett Cili? **12 pont**
3. Egy pingpong labdákat forgalmazó cég a labdáit négyesével csomagolva hozza forgalomba. A gyártó tapasztalatai szerint legfeljebb 0,05 annak a valószínűsége, hogy 10 csomagból legalább egy csomagban van hibás labda.
 - a) Legalább mennyi a valószínűsége, hogy egy darab pingpong labda hibátlan? **9 pont**
 - b) Ha egy pingpong labda 0,96 valószínűséggel lenne hibátlan, akkor mennyi a valószínűsége, hogy 3 csomagban legfeljebb 2 db labda lesz hibás? **5 pont**
4. Egy háromszög egyik oldala 15 cm, a másik két oldal aránya 4:3. A háromszög köré írható körének sugara $5\sqrt{3}$. Mekkora a háromszög szögei? **14 pont**
5. Hány egész megoldása van az alábbi egyenletnek?
$$\frac{27^x - 8^x}{18^x - 12^x} = \frac{19}{6}$$
10 pont
6. Az x tengely melyik pontjából húzhatók egyenlő hosszúságú érintő szakaszok az $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$ és az $x^2 + y^2 - 18x + 6y + 84 = 0$ egyenletű körökhöz? **15 pont**